Московский Государственный Технический Университет им. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ
Лекция 3.1

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Производная

Производная

Определение

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Определение

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Обозначение: $f'(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$.

Производная

Если

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \infty, +\infty, -\infty,$$

то говорят, что в точке x_0 существует бесконечная производная.

Производная

Определение

Правосторонней производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Определение

Правосторонней производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Обозначение: $f'_+(x_0)$.

Определение

Левосторонней производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Производная

Определение

Левосторонней производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Обозначение: $f'_-(x_0)$.

Определение

Правосторонняя и левосторонняя производные называются односторонними производными.

Теорема (о связи односторонних производных с двусторонней)

Производная

Теорема (о связи односторонних производных с двусторонней)

$\exists f'(x_0) = A \Leftrightarrow \exists f'_+(x_0) = A, f'_-(x_0) = A.$

Определение

Процесс нахождения производной называется дифференцированием.

Физический смысл производной

Физический смысл производной

Пусть $S(t)$ - длина пути, пройденного телом за время t.

Физический смысл производной

Пусть $S(t)$ - длина пути, пройденного телом за время t. Тогда средняя скорость движения тела на интервале $[t, t+\Delta t]$ будет

$$V_{sr} = \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}.$$

Физический смысл производной

Пусть $S(t)$ - длина пути, пройденного телом за время t. Тогда средняя скорость движения тела на интервале $[t, t + \Delta t]$ будет

$$V_{sr} = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}.$$

Соответственно, мгновенная скорость движения будет равна

$$V = \frac{dS}{dt}.$$

Геометрический смысл производной

Геометрический смысл производной

Пусть $f(x) \in C(x_0)$, $f'(x_0) \neq \infty$.

Геометрический смысл производной

Пусть $f(x) \in C(x_0)$, $f'(x_0) \neq \infty$.
M_0M - некоторая секущая графика функции $y = f(x)$ с уравнением $y = k(x - x_0) + y_0$, где $k = \Delta f / \Delta x$, $y_0 = f(x_0)$.

Геометрический смысл производной

Рис. : Касательная

Геометрический смысл производной

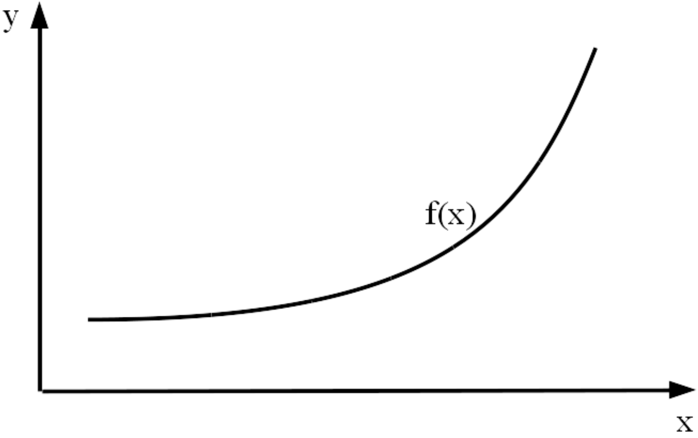

Рис. : Касательная

Геометрический смысл производной

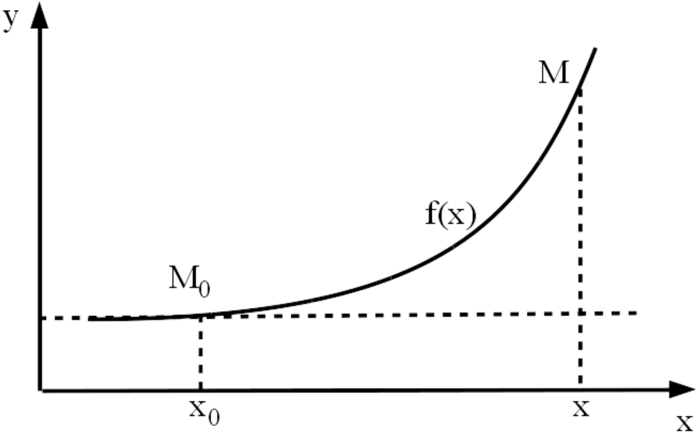

Рис. : Касательная

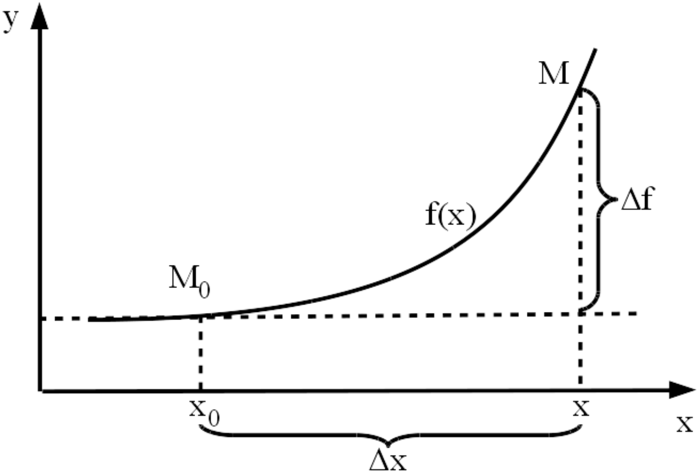

Рис. : Касательная

Геометрический смысл производной

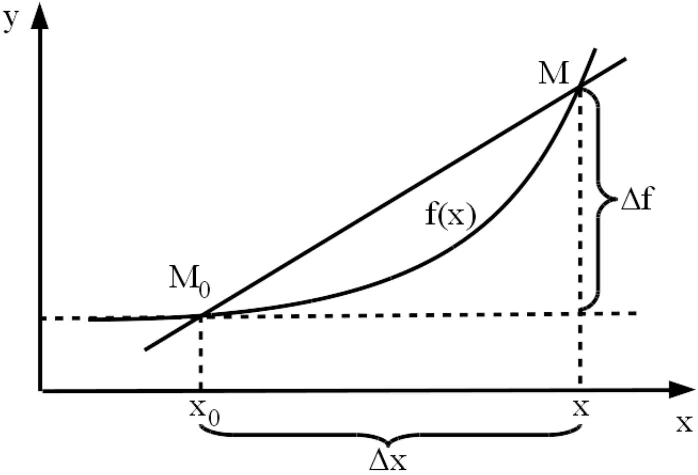

Рис. : Касательная

Геометрический смысл производной

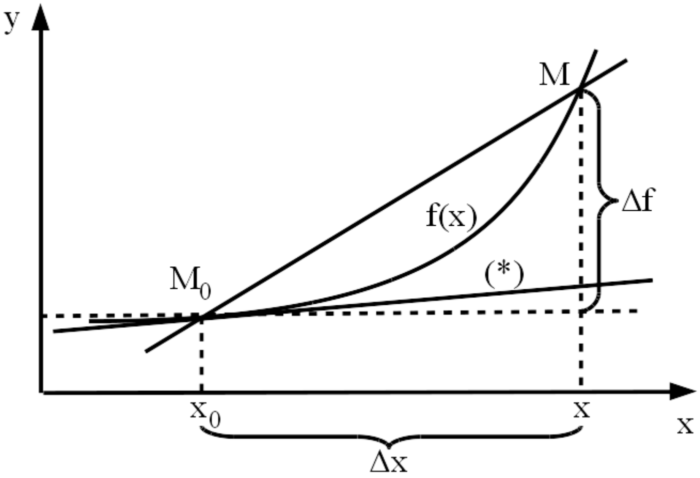

Рис. : Касательная

Геометрический смысл производной

Устремив точку M к точке M_0 при $\Delta x \to 0$, мы переведем секущую M_0M в прямую (*), которая в окрестности точки x_0 будет иметь с графиком функции $f(x)$ только одну общую точку.

Определение

Предельное положение секущей M_0M при $\Delta x \to 0$ называется наклонной касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0.

Геометрический смысл производной

Так как по определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x},$$

то предельный переход в уравнении секущей при $\Delta x \to 0$ дает уравнение касательной:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Геометрический смысл производной

Так как по определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x},$$

то предельный переход в уравнении секущей при $\Delta x \to 0$ дает уравнение касательной:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Отсюда получаем геометрический смысл конечной производной: $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, где α - угол наклона касательной.

Геометрический смысл производной

Если $f'(x_0) = \infty$, то в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет вертикальную касательную.

Вычисление производных

Производные основных элементарных ф.:

Вычисление производных

Производные основных элементарных ф.:

1. $c' = 0$
2. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$
3. $(a^x)' = a^x \ln a$
4. $(e^x)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

Производные основных элементарных ф.:

7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
10. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Производные основных элементарных ф.:

11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

14. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Вывод ряда формул:

Вывод ряда формул:

1) $y = \sin x$

Вывод ряда формул:

1) $y = \sin x$

$\Delta f =$

Вывод ряда формул:

1) $y = \sin x$

$$\Delta f = \sin(x + \Delta x) - \sin x =$$

Вычисление производных

Вывод ряда формул:

1) $y = \sin x$

$$\Delta f = \sin(x + \Delta x) - \sin x =$$
$$= 2\cos(x + \Delta x/2)\sin \Delta x/2$$

Вывод ряда формул:

1) $y = \sin x$

$y' =$

Вывод ряда формул:

1) $y = \sin x$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} =$$

Вычисление производных

Вывод ряда формул:

1) $y = \sin x$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos(x + \Delta x/2)\sin \Delta x/2}{\Delta x} =$$

Вывод ряда формул:

1) $y = \sin x$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos(x + \Delta x/2)\sin \Delta x/2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \Delta x/2) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x/2}{\Delta x/2} =$$

Вычисление производных

Вывод ряда формул:

1) $y = \sin x$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos(x + \Delta x/2)\sin \Delta x/2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \Delta x/2) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x/2}{\Delta x/2} =$$

$$= \cos x. \blacksquare$$

Вычисление производных

Вывод ряда формул:

2) $y = a^x$

Вывод ряда формул:

2) $y = a^x$

$y' =$

Вывод ряда формул:

2) $y = a^x$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} =$$

Вычисление производных

Вывод ряда формул:

2) $y = a^x$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} =$$

Вывод ряда формул:

2) $y = a^x$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} =$$

Вычисление производных

Вывод ряда формул:

2) $y = a^x$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x \Delta x \ln a}{\Delta x} =$$

Вывод ряда формул:

2) $y = a^x$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x \Delta x \ln a}{\Delta x} =$$

$$= a^x \ln a. \blacksquare$$

Правила нахождения производных, связанные с арифметическими действиями над ф.:

Правила нахождения производных, связанные с арифметическими действиями над ф.:

1. $(u+v)' = u' + v'$

Правила нахождения производных, связанные с арифметическими действиями над ф.:

1. $(u+v)' = u' + v'$
2. $(uv)' = u'v + uv'$

Вычисление производных

Правила нахождения производных, связанные с арифметическими действиями над ф.:

1. $(u+v)' = u' + v'$
2. $(uv)' = u'v + uv'$
3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Вычисление производных

Правила нахождения производных, связанные с арифметическими действиями над ф.:

1. $(u+v)' = u' + v'$
2. $(uv)' = u'v + uv'$
3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
4. $(cu)' = c \cdot u'$

Вычисление производных

Правила нахождения производных, связанные с арифметическими действиями над ф.:

1. $(u+v)' = u' + v'$
2. $(uv)' = u'v + uv'$
3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
4. $(cu)' = c \cdot u'$
5. $c' = 0$

Вывод формулы 2:

Вывод формулы 2:

$\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x),$

Вывод формулы 2:

$$\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x), u(x+\Delta x) = u(x) + \Delta u$$

Вывод формулы 2:

$\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x), u(x+\Delta x) = u(x) + \Delta u$

$\Delta v = v(x+\Delta x) - v(x),$

Вывод формулы 2:

$\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x), u(x+\Delta x) = u(x) + \Delta u$

$\Delta v = v(x+\Delta x) - v(x), v(x+\Delta x) = v(x) + \Delta v$

Вычисление производных

Вывод формулы 2:

$y = uv$

Вывод формулы 2:

$y = uv$

$\Delta y =$

Вывод формулы 2:

$y = uv$

$\Delta y = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) =$

Вывод формулы 2:

$y = uv$

$\Delta y = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) =$

$= (u(x) + \Delta u)(v(x) + \Delta v) - u(x)v(x) =$

Вывод формулы 2:

$y = uv$

$$\Delta y = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) =$$
$$= (u(x)+\Delta u)(v(x)+\Delta v) - u(x)v(x) =$$
$$= u(x)\Delta v + \Delta u v(x) + \Delta u \Delta v$$

Вывод формулы 2:

$y = uv$

$$\Delta y = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) =$$

$$= (u(x)+\Delta u)(v(x)+\Delta v) - u(x)v(x) =$$

$$= u(x)\Delta v + \Delta u v(x) + \Delta u \Delta v$$

$y' =$

Вывод формулы 2:

$y = uv$

$\Delta y = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) =$

$= (u(x) + \Delta u)(v(x) + \Delta v) - u(x)v(x) =$

$= u(x)\Delta v + \Delta u v(x) + \Delta u \Delta v$

$y' = (uv)' =$

Вывод формулы 2:

$y = uv$

$\Delta y = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) =$

$= (u(x) + \Delta u)(v(x) + \Delta v) - u(x)v(x) =$

$= u(x)\Delta v + \Delta u v(x) + \Delta u \Delta v$

$$y' = (uv)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

Вывод формулы 2:

$y = uv$

$$\Delta y = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) =$$

$$= (u(x)+\Delta u)(v(x)+\Delta v) - u(x)v(x) =$$

$$= u(x)\Delta v + \Delta u v(x) + \Delta u \Delta v$$

$$y' = (uv)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} v(x) + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v \right) =$$

Вычисление производных

Вывод формулы 2:

$y = uv$

$\Delta y = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) =$

$= (u(x)+\Delta u)(v(x)+\Delta v) - u(x)v(x) =$

$= u(x)\Delta v + \Delta u v(x) + \Delta u \Delta v$

$$y' = (uv)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}v(x) + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v) =$$

$= uv' + u'v + u' \cdot 0 =$

Вывод формулы 2:

$$y = uv$$

$$\Delta y = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) =$$

$$= (u(x)+\Delta u)(v(x)+\Delta v) - u(x)v(x) =$$

$$= u(x)\Delta v + \Delta u v(x) + \Delta u \Delta v$$

$$y' = (uv)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}v(x) + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v\right) =$$

$$= uv' + u'v + u'\cdot 0 = uv' + u'v.\blacksquare$$

Производная обратной функции:

Производная обратной функции:
$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Вычисление производных

Производная обратной функции:

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Вывод формулы:

$$(f^{-1}(y_0))' =$$

Производная обратной функции:

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Вывод формулы:

$$(f^{-1}(y_0))' = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} =$$

Производная обратной функции:

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Вывод формулы:

$$(f^{-1}(y_0))' = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} =$$

Производная обратной функции:

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Вывод формулы:

$$(f^{-1}(y_0))' = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}. \blacksquare$$

Производная сложной функции

Производная сложной функции

Если $y = u(v(x))$ - сложная функция, существуют $v'(x_0)$ и $u'(v_0)$, где $v_0 = v(x_0)$, то $y'(x_0) = u'(v_0) \cdot v'(x_0)$.