

## Лекция 4.8

### 1 Теория кривых

Пусть векторы  $\vec{r}(t)$  при всех значениях переменной  $t$  прикреплены к точке  $O$ , которая является началом декартовой системы координат.

Вектор  $\vec{r}(t)$  соединяет точку  $O$  с некоторой точкой  $M$ . Соответственно,  $\vec{r}(t)$  называется радиус-вектором точки  $M$ .

За координаты точки  $M$  возьмем координаты ее радиус-вектора.

#### *Определение*

Непрерывное отображение отрезка  $[a, b]$  в пространство  $R^3$  называется кривой и обозначается  $\Gamma$ .

#### *Способы задания:*

- 1)  $\Gamma = \{M(t) | a \leq t \leq b\}$  - точечное представление,
- 2)  $\Gamma = \{\vec{r}(t) | a \leq t \leq b\}$  - векторное представление,
- 3)  $\Gamma = \{x(t), y(t), z(t) | a \leq t \leq b\}$  - координатное представление.

#### *Определение*

Множество точек пространства  $R^3$ , на которое отображается отрезок  $[a, b]$ , называется носителем кривой  $\Gamma$ .

#### *Определение*

Если носитель лежит в некоторой плоскости, то кривая называется плоской.

#### *Определение*

Последовательность точек  $t_0, t_1, \dots, t_n$ , удовлетворяющая условию  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ , называется разбиением отрезка  $[a, b]$ .

*Определение*

Последовательность точек  $M_0, M_1, \dots, M_n$ , соответствующая значениям  $t_0, \dots, t_n$ , называется разбиением кривой  $\Gamma$ .

Соединив точки  $M_0, M_1, \dots, M_n$  отрезками  $M_0M_1, M_1M_2, \dots, M_{n-1}M_n$ , получим ломаную  $P_n$ , которая называется вписанной в кривую  $\Gamma$ . Длина каждого отрезка  $M_{k-1}M_k$  равна  $|\bar{r}(t_k) - \bar{r}(t_{k-1})|$ . Следовательно, длина  $\sigma_n$  всей ломаной  $P_n$  равна:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n |\bar{r}(t_k) - \bar{r}(t_{k-1})|.$$

*Определение*

Длиной кривой  $\Gamma$  называется точная верхняя грань длин всевозможных ломаных  $P_n$ , т.е.

$$L_\Gamma = \sup \sigma_n.$$

*Определение*

Если функция  $\bar{r}'(t)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то кривая  $\Gamma$  называется непрерывно дифференцируемой.

*Теорема (о переменной длине дуги)*

Пусть кривая  $\Gamma$  непрерывно дифференцируема. Тогда переменная длина дуги  $l$ , отсчитываемая от начала  $\bar{r}(a)$  кривой  $\Gamma$ , является возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией переменной  $t$ . При этом

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} = \left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right|.$$

Рассмотрим плоскую кривую  $\Gamma = \{x(t), y(t) | a \leq t \leq b\}$ . Тогда

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

↓

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

или

$$(dl)^2 = (x' dt)^2 + (y' dt)^2 = (dx)^2 + (dy)^2.$$

$dl$  - дифференциал длины дуги плоской кривой.

$PM = \Delta y$  - приращение функции  $y$  в точке  $x_0 + dx$ ,

$PN = dy$  - приращение ординаты касательной в точке  $x_0 + dx$ ,

$\Delta M_0NP$  - прямоугольный треугольник

$$\Rightarrow M_0N^2 = M_0P^2 + PN^2 = dx^2 + dy^2 = (dl)^2$$

$$\Rightarrow dl = M_0N$$

Отсюда получаем геометрический смысл дифференциала длины дуги плоской кривой:

Дифференциал длины дуги  $dl$  равен приращению длины касательной  $M_0N$ .

## 2 Кривизна и радиус кривизны плоской кривой

Рассмотрим на кривой  $\Gamma$  точки  $M_0$  и  $M_1$ .

Проведем через эти точки касательные. При переходе от точки  $M_0$  к точке  $M_1$  касательная поворачивается на угол  $\Delta\varphi$ .

*Определение*

Отношение угла  $\Delta\varphi$  к длине  $\Delta l$  дуги, заключенной между точками  $M_0$  и  $M_1$ , называется средней кривизной дуги:

$$K_{sr} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta l}.$$

$K_{sr}$  характеризует среднюю изогнутость кривой. Чем меньше  $K_{sr}$ , тем ближе кривая к прямой.

*Определение*

Кривизной кривой  $\Gamma$  в точке  $M_0$  называется предел

$$K = \lim_{M_1 \rightarrow M_0} K_{sr}.$$

*Определение*

Величина, обратная кривизне, называется радиусом кривизны.

Обозначение:  $R = \frac{1}{K}$ .

Проведем к кривой  $\Gamma$  в точке  $M$  нормаль и отложим на этой нормали в сторону вогнутости кривой отрезок  $MN$  с длиной, равной  $R$ .

*Определение*

Точка  $N$  называется центром кривизны, а окружность с центром в точке  $N$  и радиусом  $R$  - окружностью кривизны плоской кривой.