Лекция 4.3

1 Производная сложной функции

Теорема №1

Пусть функции одного переменного $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы в точке t_0 и $a_x = x(t_0)$, $a_y = y(t_0)$. Если функция двух переменных $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (a_x, a_y), то сложная функция $z = f(x(t), y(t))$ определена в некоторой окрестности точки t_0 и имеет в этой точке производную

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Теорема №2

Пусть функции двух переменных $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$ непрерывны в точке (u_0, v_0) и имеют в ней частные производные

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v},$$

а функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (a_x, a_y), где $a_x = x(u_0, v_0)$, $a_y = y(u_0, v_0)$. Тогда в точке (u_0, v_0) существуют частные производные сложной функции $z = f(x(u, v), y(u, v))$, причем

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Теорема №3

Пусть функции k переменных $x_i = x_i(t)$, $t = (t_1, t_2, ..., t_k)$, $i = 1, 2, ..., n$ непрерывны в точке $t^{(0)} = (t_1^{(0)}, t_2^{(0)}, ..., t_k^{(0)})$ и имеют в ней частные производные

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_j},$$

а функция $y = y(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ дифференцируема в точке $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$, где $a_i = x_i(t^{(0)})$, $i = 1, 2, ..., n$. Тогда в точке $t^{(0)}$ сложная функция $y = y(x(t))$ имеет частные производные

$$\frac{\partial y}{\partial t_j} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_j} + ... + \frac{\partial y}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_j}, j = 1, 2, ..., k.$$

Наиболее часто встречающиеся на практике сложные функции и их производные:

1) $z = f(x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

2) $z = f(t, x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Здесь $\dfrac{dz}{dt}$ - полная производная функции z по переменной t, которая учитывает, что x и y - это некоторые функции от t, а $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ - частная производная функции z по переменной t в предположении, что x и y - это независимые переменные.

3) $z = f(x, y)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

2 Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, где $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Здесь u, v - независимые переменные, x, y - промежуточные переменные. Тогда по определению дифференциала имеем

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv =$$
$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv =$$
$$= \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right) =$$
$$= \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Получаем

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Свойство инвариантности означает, что форма дифференциала не зависит от того, для каких переменных (промежуточных или независимых) он выписан.

3 Приближенные вычисления

Пусть необходимо вычислить значение функции f в точке (x, y), при этом известно значение функции f в точке (a_x, a_y).

Для дифференцируемой функции имеем:

$$f(x, y) - f(a_x, a_y) = df(a_x, a_y) + \circ(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{(x - a_x)^2 + (y - a_y)^2}$.

Отбросив $\circ(\rho)$, получаем

$$f(x, y) - f(a_x, a_y) \approx df(a_x, a_y)$$

или

$$f(x, y) \approx f(a_x, a_y) + df(a_x, a_y) =$$
$$= f(a_x, a_y) + \frac{\partial f(a_x, a_y)}{\partial x}(x - a_x) + \frac{\partial f(a_x, a_y)}{\partial y}(y - a_y).$$

4 Дифференциалы высших порядков

Определение

Вторым дифференциалом функции $f(x)$ называется квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j.$$

Обозначение: $d^2 f$.

Определение

Дифференциалом порядка n функции $f(x)$ называется дифференциал от дифференциала порядка $(n - 1)$.

Обозначение: $d^n f = d(d^{n-1} f)$.

Частные случаи:

1) $u = f(x, y)$

дифференциал первого порядка:
$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

дифференциал второго порядка:
$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2,$$

дифференциал третьего порядка:
$$d^3 f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3,$$

2) $u = f(x, y, z)$

дифференциал первого порядка:
$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

дифференциал второго порядка:
$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2 +$$
$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}dxdz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}dydz.$$

Получим выражение второго дифференциала $d^2 f$ для функции 2-х переменных $u = f(x, y)$.

$$d^2 f = d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) =$$
$$= d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx\right) + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot dx + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot dy =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\right)dy =$$
$$= \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right| =$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2.$$

5 Задача о полном дифференциале

Пусть дано выражение $w = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. Величина w не всегда является дифференциалом какой-либо функции.

Теорема (необходимое условие полного дифференциала)

Если в области D выражение w является полным дифференциалом некоторой функции, то

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Теорема (достаточное условие полного дифференциала)

Если в односвязной области D выполняется условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

то выражение w является полным дифференциалом.