Лекция 4.1

1 Типы множеств

Определение

Множество всевозможных упорядоченных последовательностей n действительных чисел $(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется n-мерным точечным арифметическим пространством R^n.

Определение

Елементы множества R^n называются точками n-мерного пространства и обозначаются: $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Определение

Число x_i называется i-ой координатой точки x.

Расстояние между двумя точками $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ определяется по формуле:
$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$

Определение

Совокупность всех точек $x \in R^n$ таких, что $\rho(x, a) < \varepsilon$, называется n-мерным шаром с центром в точке a и радиуса ε или ε-окрестностью точки a.

Обозначение: $U(a, \varepsilon) = \{x | \rho(x, a) < \varepsilon\}$.

Определение

Пусть дано множество $X \subset R^n$. Точка $x \in X$ называется внутренней точкой этого множества, если $\exists U(x, \varepsilon) \subset X$.

Определение

Множество, каждая точка которого является его внутренней точкой, называется открытым.

Определение

Точка x называется точкой прикосновения множества X, если в $\forall U(x, \varepsilon)$ содержится хотя бы одна точка множества X.

Определение

Совокупность всех точек прикосновения множества X называется замыканием множества X и обозначается: $\overline{X}$.

Определение

Множество X называется замкнутым, если $X = \overline{X}$.

Определение

Точка x называется граничной точкой множества X, если $\forall U(x, \varepsilon)$ содержит точки как принадлежащие множеству X, так и не принадлежащие ему.

Определение

Множество всех граничных точек множества X называется границей множества X и обозначается ∂X.

Определение

Множество X называется ограниченным, если существует некоторый n-мерный шар $U(O, \varepsilon)$ с центром в начале координат $O = (0, 0, ..., 0)$ такой, что $X \subset U(O, \varepsilon)$.

Определение

Множество X называется компактом, если оно замкнуто и ограничено.

Определение

Множество X называется линейно связным, если любые две точки $x, y \in X$ можно соединить линией, целиком лежащей в X.

Определение

Открытое линейно связное множество называется областью.

Определение

Замыкание области называется замкнутой областью.

Определение

Линейно связное множество X называется односвязным, если любую замкнутую кривую в этом множестве можно стянуть в точку, оставаясь внутри X. В противном случае X называется многосвязным множеством.

2 Функция нескольких переменных

Определение

Пусть задано множество $E \subset R^n$. Если каждой точке $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in E$ поставлено в соответствие число $u \in R$, то на множестве E задана функция n переменных $u = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ называются независимыми переменными, u - зависимой, а множество E - областью определения функции f.

Определение

Множество точек $(x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющих уравнению

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = C,$$

где C - некоторая постоянная, называется множеством уровня функции $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, соответствующим значению C.

Частные случаи:
При $n = 2$ множество уровня называется линией уровня.
При $n = 3$ множество уровня называется поверхностью уровня.

3 Предел и непрерывность

Пусть E - область определения функции $f(x)$.
Определение
Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке a, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in E, 0 < \rho(x, a) < \delta(\varepsilon) : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Обозначение:
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ или $\lim\limits_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ ... \\ x_n \to a_n}} f(x_1, x_2, ..., x_n) = b.$

В определении предела предполагается, что x стремится к a произвольным образом.

Определение
Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Определение
Функция $f(x)$ непрерывна на множестве $X \subset E$, если она непрерывна в каждой точке из множества X.

Свойства непрерывных функций:

1. Сумма, произведение, частное и суперпозиция непрерывных функций есть функция непрерывная.

2. Элементарные функции нескольких переменных непрерывны всюду, где они определены.

Определение

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

Определение

Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0.$$