Лекция 3.6

1 Условия существования экстремума

Теорема (необходимое условие экстремума)

Если точка c является точкой экстремума функции $f(x)$, то в этой точке $f'(c)$ равен нулю или не существует.

Если $f'(c) = 0$, то в точке c функция имеет гладкий экстремум (рис. 1).

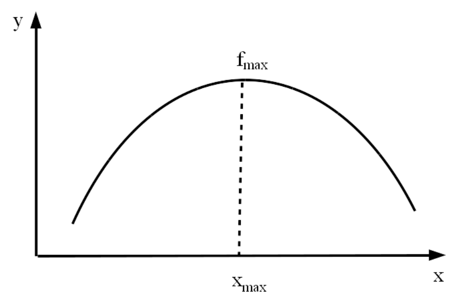

Рис. 1: Гладкий экстремум

Если $f'(c)$ не существует (т.е. $f'(c) = \infty$), то в точке c функция имеет острый экстремум (рис. 5).

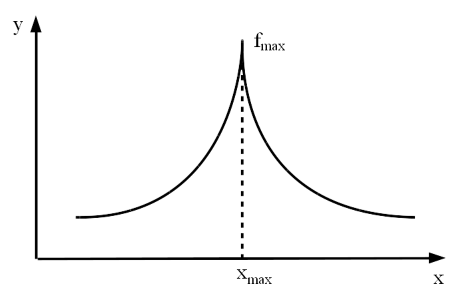

Рис. 2: Острый экстремум

*Теорема (достаточное условие экстремума по первой производной)**

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки c, кроме, быть может, самой точки c, в которой она является непрерывной. Тогда если $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку c, то точка c является точкой экстремума.

Доказательство

Рассмотрим случай $f'(x) > 0$ для $x < c$ и $f'(x) < 0$ для $x > c$. По теореме Лагранжа $f(x) - f(c) = f'(\xi)(x - c)$, где число ξ лежит на интервале с концами x и c.

Если $x < c$, то $x - c < 0$, $f'(\xi) > 0$. $\Rightarrow f(x) - f(c) < 0$, $f(x) < f(c)$.

Если $x > c$, то $x - c > 0$, $f'(\xi) < 0$. $\Rightarrow f(x) - f(c) < 0$, $f(x) < f(c)$.

$\Rightarrow c$ - точка локального максимума.

Случай локального минимума рассматривается аналогично. ■

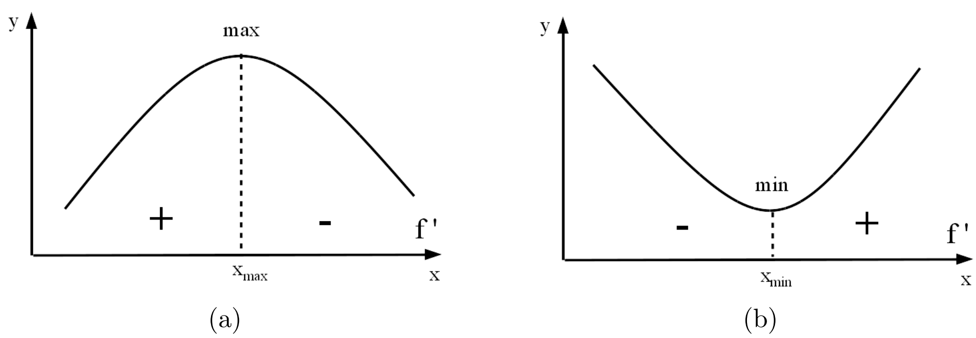

Рис. 3: Точки максимума (a) и минимума (b)

Теорема (достаточное условие экстремума по второй производной)

Пусть $f(x) \in D^2(c)$, $f'(c) = 0$, $f''(c) \neq 0$. Если $f''(c) < 0$, то c - точка локального максимума. Если $f''(c) > 0$, то c - точка локального минимума.

2 Выпуклость функции

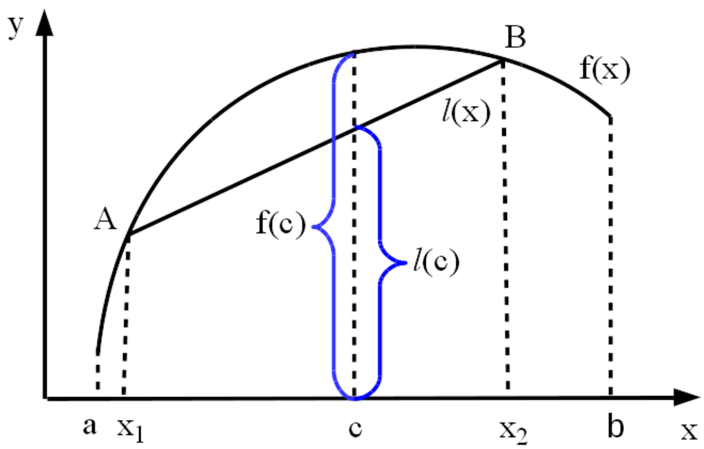

Рис. 4: Выпуклость функции

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b). Выберем на графике функции произвольные точки A с координатой x_1 и B с координатой x_2. Через точки A и B проведем прямую с уравнением

$$l(x) = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$

На интервале (x_1, x_2) выберем произвольную точку c. Тогда $f(c)$ - расстояние от оси Ox до графика функции $f(x)$ в точке c, $l(c)$ - расстояние от оси Ox до прямой AB в точке c.

Определение

Функция $f(x)$ называется выпуклой вверх (вниз) на (a, b), если $\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$ и $\forall c \in (x_1, x_2)$ выполняется неравенство $l(c) \leq f(c)$ $(l(c) \geq f(c))$.

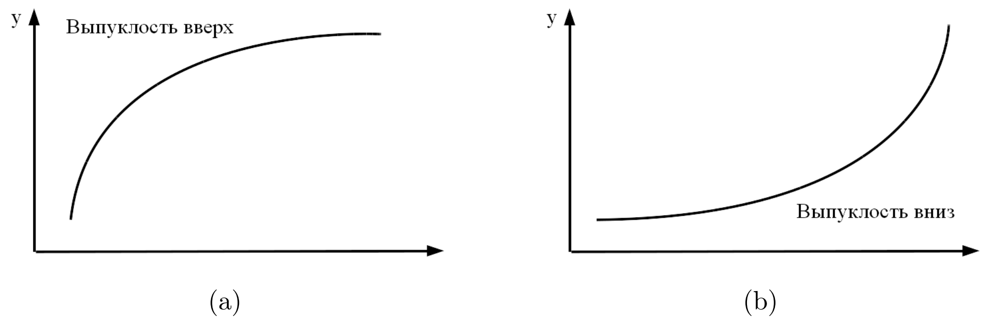

Рис. 5: Примеры функций, выпуклых вверх (a) и вниз (b)

*Теорема (достаточное условие выпуклости)**

Пусть $f(x) \in D^2(a,b)$. Если $f''(x) \le 0\ \forall x \in (a,b)$, то $f(x)$ выпукла вверх. Если $f''(x) \ge 0\ \forall x \in (a,b)$, то $f(x)$ выпукла вниз.

Доказательство

Пусть $a < x_1 < x < x_2 < b$.

$$l(x) - f(x) =$$
$$= \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} - f(x)\frac{(x - x_1) + (x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$
$$= \frac{(f(x_2) - f(x))(x - x_1) - (f(x) - f(x_1))(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$
$$= |\text{по теореме Лагранжа } f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), a < c < b| =$$
$$= \frac{f'(\eta)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(\xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$
$$= \frac{(f'(\eta) - f'(\xi))(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$
$$= |\text{по теореме Лагранжа } f'(b) - f'(a) = f''(c)(b - a), a < c < b| =$$
$$= \frac{f''(\zeta)(\eta - \xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$

Здесь $x_1 < \xi < x < \eta < x_2$ и $\xi < \zeta < \eta$.

$(\eta - \xi), (x - x_1), (x_2 - x), (x_2 - x_1) > 0$.
Если $f''(\zeta) \leq 0$, то $l(x) \leq f(x)$. $\Rightarrow f(x)$ выпукла вверх.
Если $f''(\zeta) \geq 0$, то $l(x) \geq f(x)$. $\Rightarrow f(x)$ выпукла вниз.
■

Определение

Пусть $f(x) \in D(c)$, $L(x)$ - уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке c. Если $f(x) - L(x)$ меняет знак при переходе через точку c, то c называется точкой перегиба функции $f(x)$.

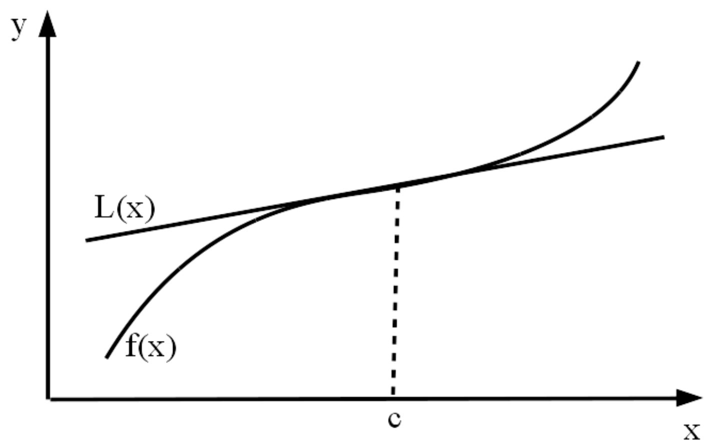

Рис. 6: Поведение функции в окрестности точки перегиба

*Теорема (необходимое условие перегиба)**

Если в точке перегиба существует вторая производная, то она равна нулю.

Доказательство

Пусть функция $f(x)$ имеет в точке c вторую производную $f''(c)$, и $L(x)$ - касательная к графику функции $f(x)$ в точке c:

$$L(x) = f(c) + f'(c)(x - c).$$

По формуле Тейлора имеем:

$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \dfrac{1}{2}f''(c)(x-c)^2 + \circ((x-c)^2) =$

$= L(x) + \dfrac{1}{2}f''(c)(x-c)^2 + \circ((x-c)^2).$

$\Rightarrow f(x) - L(x) = \dfrac{1}{2}f''(c)(x-c)^2 + \circ((x-c)^2).$

Величина $\circ((x-c)^2)$ стремится к нулю быстрее, чем $(x-c)^2$ при $x \to c$.

$\Rightarrow \exists U(c)\ \forall x \in U(c) : |\dfrac{1}{2}f''(c)(x-c)^2| > | \circ ((x-c)^2)|$ при условии, что $f''(c) \neq 0$.

В этом случае в $U(c)$ знак $f(x) - L(x)$ будет совпадать со знаком $f''(c)$, т.е. $f(x) - L(x)$ не будет менять знак при переходе через точку c, а значит, c не будет точкой перегиба.

$\Rightarrow$ Если c - точка перегиба, то $f''(c) = 0$. ■

Теорема (достаточное условие перегиба)

Если при переходе через точку c вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то точка c - это точка перегиба.

3 Схема полного исследования функции

1. Область определения
2. Нули функции
3. Интервалы знакопостоянства
4. Асимптоты
   а) вертикальные
   б) наклонные
5. Точки локального экстремума, возрастание и убывание функции
6. Точки перегиба, выпуклость вверх и вниз