Лекция 3.2

1 Дифференцируемость функции

Определение

Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если ее приращение Δf в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0,$$

где A - постоянная, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f = f(x) - f(x_0)$.

Обозначение: $f(x) \in D(x_0)$ - функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0.

*Теорема (об эквивалентности дифференцируемости и существования производной)**

$$f(x) \in D(x_0) \Leftrightarrow \exists f'(x_0).$$

Доказательство

1) необходимость ($\Rightarrow$)
Дано: $f(x) \in D(x_0)$
Доказать: $\exists f'(x_0)$

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x), \frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \frac{\circ(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\circ(\Delta x)}{\Delta x}, \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A \Rightarrow \exists f'(x_0).$$

2) достаточность ($\Leftarrow$)
Дано: $\exists f'(x_0)$
Доказать: $f(x) \in D(x_0)$

$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.
Пусть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A$.
По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой
$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.
Отсюда $\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$.
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$
$\Rightarrow \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = \circ(\Delta x), \Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)$
$\Rightarrow f(x) \in D(x_0)$.
■

*Теорема (о непрерывности дифференцируемой функции)**

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow f(x) \in C(x_0).$$

Доказательство
$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)$
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)) = 0 \Rightarrow f(x) \in C(x_0)$.
■

2 Производные высших порядков

Определение

Производной второго порядка функции $f(x)$ называется производная от производной $f'(x)$.

Обозначение: $f''(x) = (f'(x))'$

Определение

Производной n-ого порядка функции $f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-ого порядка.

Обозначение: $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$

$f^{(2)}(x), f^{(3)}(x), f^{(4)}(x), f^{(5)}(x), ...$
$f''(x), f'''(x), f^{IV}(x), f^{V}(x), ...$

Пример:
$(2^x)' = 2^x \ln 2,$
$(2^x)'' = 2^x \ln^2 2,$
$(2^x)''' = 2^x \ln^3 2,$
...
$(2^x)^{(n)} = 2^x \ln^n 2.$

3 Физический смысл второй производной

$S(t)$ - длина пути, пройденного телом за время t.
$V = S'(t)$ - скорость
$a = V'(t) = S''(t)$ - ускорение

4 Дифференциал функции

Пусть $f(x) \in D(x_0)$. Тогда $\Delta f = A\Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$.

Определение

Линейная функция $A\Delta x$ называется дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0.

Обозначение: $df(x_0)$

Определим константу A:

$$\Delta f = A\Delta x + \circ(\Delta x) \qquad : \Delta x$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \frac{\circ(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\circ(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = A$$

$$\Downarrow$$

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$$

Приращение независимой переменной Δx часто обозначают как dx. Тогда

$$df(x_0) = f'(x_0)dx.$$

Пример:
$f(x) = 2^x, x_0 = 0,$
$f'(x) = 2^x \ln 2, f'(0) = \ln 2$
$\Rightarrow df(0) = \ln 2dx.$

5 Геометрический смысл дифференциала

Если Δf - это приращение функции, то df - это приращение ординаты касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 при изменении аргумента на Δx (см. рис. 1).

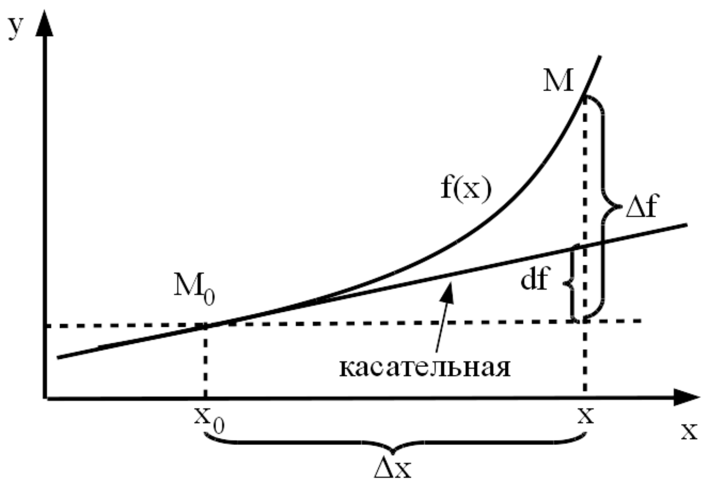

Рис. 1: Приращение Δf и дифференциал df функции

Поскольку
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f - df}{df} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\circ(\Delta x)}{f'(x_0)\Delta x} = 0,$$
то чем меньше приращение аргумента Δx, тем точнее дифференциал оценивает значение приращения функции.

6 Приближенные вычисления функции с помощью дифференциала

$$\Delta f = df(x_0) + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$$

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$$

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$$

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Пример:
$f(x) = \ln x, x = 1.1 \Rightarrow x_0 = 1, \Delta x = 0.1$
$f'(x) = 1/x, f'(x_0) = 1 \Rightarrow \ln 1.1 \approx \ln 1 + 1 \cdot 0.1 = 0 + 0.1 = 0.1$
Точное значение: $\ln 1.1 = 0.09531$

7 Правила вычисления дифференциала

1. $d(u+v) = du + dv$
2. $d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv$
3. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}, v \neq 0$

8 Инвариантность формы первого дифференциала

$f(x) = u(v(x))$ - сложная функция,
v - промежуточная переменная,
x - независимая переменная,
$v_0 = v(x_0)$

$df(x_0) = f'(x_0)dx = u'(v_0)v'(x_0)dx = u'(v_0)dv$
Дифференциал первого порядка df выглядит одинаково, независимо от того, по какой переменной (независимой x или промежуточной v) он считается.

9 Дифференциалы высших порядков

Определение
Дифференциалом второго порядка называется дифференциал от дифференциала первого порядка.

Обозначение: $d^2f(x_0) = d(df(x_0)) = f''(x_0)dx^2$

Определение

Дифференциалом n-ого порядка называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-ого порядка.

Обозначение: $d^nf(x_0) = d(d^{n-1}f(x_0)) = f^{(n)}(x_0)dx^n$