Лекция 3.1

1 Производная

Определение

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Обозначение: $f'(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$.

Если

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\infty,+\infty,-\infty,$$

то говорят, что в точке x_0 существует бесконечная производная.

Определение

Правосторонней производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Обозначение: $f'_+(x_0)$.

Определение

Левосторонней производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Обозначение: $f'_-(x_0)$.

Определение

Правосторонняя и левосторонняя производные называются односторонними производными.

Теорема (о связи односторонних производных с двусторонней)

$\exists f'(x_0) = A \Leftrightarrow \exists f'_+(x_0) = A, f'_-(x_0) = A.$

Определение

Процесс нахождения производной называется дифференцированием.

2 Физический смысл производной

Пусть $S(t)$ - длина пути, пройденного телом за время t. Тогда средняя скорость движения тела на интервале $[t, t + \Delta t]$ будет

$$V_{sr} = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}.$$

Соответственно, мгновенная скорость движения будет равна

$$V = \frac{dS}{dt}.$$

3 Геометрический смысл производной

Пусть $f(x) \in C(x_0)$, $f'(x_0) \neq \infty$, M_0M - некоторая секущая графика функции $y = f(x)$ с уравнением $y = k(x - x_0) + y_0$, где $k = \Delta f / \Delta x$, $y_0 = f(x_0)$ (см. рис. 1).

Устремив точку M к точке M_0 при $\Delta x \to 0$, мы переведем секущую M_0M в прямую (*), которая в окрестности точки x_0 будет иметь с графиком функции $f(x)$ только одну общую точку.

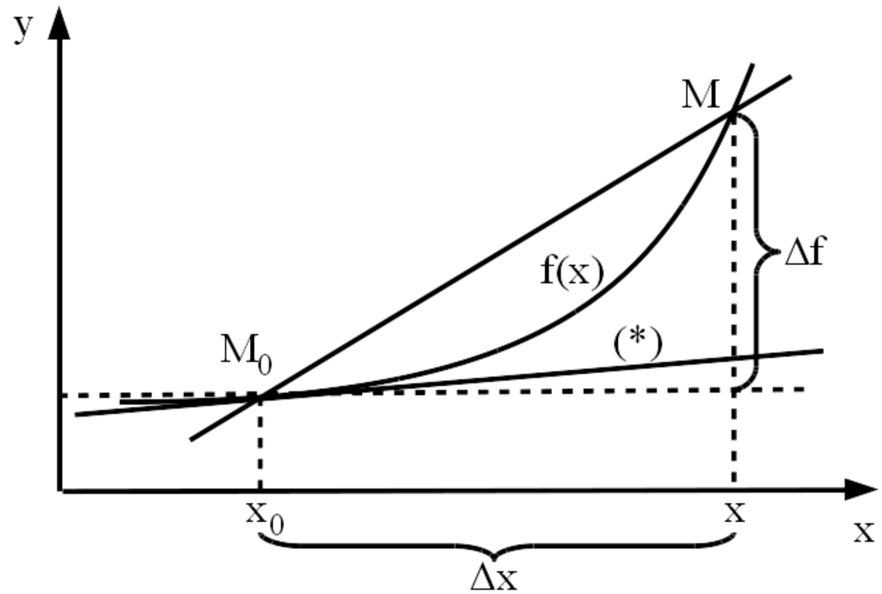

Рис. 1: Касательная

Определение

Предельное положение секущей M_0M при $\Delta x \to 0$ называется наклонной касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0.

Так как по определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x},$$

то предельный переход в уравнении секущей при $\Delta x \to 0$ дает уравнение касательной:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Отсюда получаем геометрический смысл конечной производной: $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, где α - угол наклона касательной.

Если $f'(x_0) = \infty$, то в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет вертикальную касательную.

4 Вычисление производных

Производные основных элементарных функций:

1. $c' = 0$
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
3. $(a^x)' = a^x \ln a$
4. $(e^x)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
10. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
14. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Вывод ряда формул:

1) $y = \sin x$

$$\Delta f = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\cos(x+\Delta x/2)\sin \Delta x/2$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos(x+\Delta x/2)\sin\Delta x/2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\Delta x/2)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x/2}{\Delta x/2} = \cos x.\blacksquare$$

2) $y = a^x$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x \Delta x \ln a}{\Delta x} = a^x \ln a. \blacksquare$$

Правила нахождения производных, связанные с арифметическими действиями над функциями:

1. $(u+v)' = u' + v'$
2. $(uv)' = u'v + uv'$
3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
4. $(cu)' = c \cdot u'$
5. $c' = 0$

Вывод формулы 2:

$\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x), u(x+\Delta x) = u(x) + \Delta u$
$\Delta v = v(x+\Delta x) - v(x), v(x+\Delta x) = v(x) + \Delta v$
$y = uv$

$$\Delta y = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) =$$
$$= (u(x) + \Delta u)(v(x) + \Delta v) - u(x)v(x) =$$
$$= u(x)\Delta v + \Delta u v(x) + \Delta u \Delta v$$
$$y' = (uv)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} v(x) + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v) =$$
$$= uv' + u'v + u' \cdot 0 = uv' + u'v.$$

$\blacksquare$

Производная обратной функции:

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Вывод формулы:

$$(f^{-1}(y_0))' = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}. \blacksquare$$

Производная сложной функции

Если $y = u(v(x))$ - сложная функция, существуют $v'(x_0)$ и $u'(v_0)$, где $v_0 = v(x_0)$, то $y'(x_0) = u'(v_0) \cdot v'(x_0)$.