Аналитическая геометрия

Модуль 1. Матричная алгебра. Векторная алгебра

Текст 4 (самостоятельное изучение)

Аннотация

Линейная зависимость векторов. Критерии линейной зависимости двух, трех и четырех векторов. Базис. Координаты вектора в заданном базисе. Ортонормированный базис в пространстве. Координаты вектора в ортонормированном базисе как проекции этого вектора на направление базисных векторов. Скалярное произведение двух векторов, его алгебраические свойства. Формулы для вычисления скалярного произведения, длины вектора, косинуса угла между векторами через координаты векторов в ортонормированном базисе.

6.1. Понятие линейной зависимости системы векторов. Базис

Понятия линейной комбинации, линейной зависимости и независимости вводятся аналогично тому, как это было определено для строк (столбцов) матрицы.

Опр. Вектор

$$\vec{b} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_k\vec{a}_k \tag{1}$$

является **линейной комбинацией** векторов $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_k$, где $\alpha_1,\ \alpha_2,...,\alpha_k$ - любые действительные числа.

Опр. Будем говорить, что вектор $\vec{b}$ **разлагается** (**линейно выражается**) по векторам $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_k$, если он равен некоторой линейной комбинации (1) векторов $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_k$. Числа $\alpha_1,\ \alpha_2,...,\alpha_k$ называются **коэффициентами разложения** вектора $\vec{b}$ по **системе** векторов $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_k$.

Опр. Система векторов $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_k$ называется **линейно зависимой**, если существует такой набор коэффициентов $\alpha_1,\ \alpha_2,...,\alpha_k$, что

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_k\vec{a}_k = \vec{0}, \tag{2}$$

при этом хотя бы один их этих коэффициентов не равен нулю. Если указанного набора коэффициентов не существует, то система векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, …, $\vec{a}_k$ называется **линейно независимой**.

Пример. Определить, является ли данная система векторов линейно зависимой.

а) $\vec{a}_1=(1;0)$ и $\vec{a}_2=(0;3)$.

Решение. Составим линейную комбинацию (2) для двух векторов: $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2=\vec{0}$ или в матричном виде -

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Запишем это равенство в виде системы:

$$\begin{cases}1\cdot\alpha_1+0\cdot\alpha_2=0,\\0\cdot\alpha_1+3\cdot\alpha_2=0.\end{cases}\qquad(3)$$

Определитель матрицы однородной системы (3) $\Delta=\begin{vmatrix}1&0\\0&3\end{vmatrix}=3\neq 0$, следовательно, система (3) имеет единственное тривиальное решение $\alpha_1=\alpha_2=0$. Значит, система векторов $\vec{a}_1=(1;0)$ и $\vec{a}_2=(0;3)$ является линейно независимой.

б) $\vec{b}_1=(1;3;2)$ и $\vec{b}_1=(2;6;4)$

Решение. Составим линейную комбинацию (2) для двух векторов $\vec{b}_1,\vec{b}_2$ в матричном виде -

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}2\\6\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Запишем это равенство в виде системы:

$$\begin{cases} 1\cdot\alpha_1 + 2\cdot\alpha_2 = 0, \\ 3\cdot\alpha_1 + 6\cdot\alpha_2 = 0, \\ 2\cdot\alpha_1 + 4\cdot\alpha_2 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Ранг матрицы системы (4) равен одному, следовательно, система (4) имеет бесконечно много решений. Значит, система векторов $\vec{b}_1 = (1;3;2)$ и $\vec{b}_2 = (2;6;4)$ является линейно зависимой.

Можно заметить, что векторы $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ коллинеарны, т.е. $\vec{b}_2 = 2\cdot\vec{b}_1$. Тогда можно дать другое, эквивалентное, определение линейной зависимости векторов.

<u>Опр</u>. Система векторов $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_k$ называется **линейно зависимой**, если какой-либо из векторов этой системы можно представить в виде линейной комбинации остальных. Если ни один из векторов $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_k$ нельзя представить в виде линейной комбинации остальных, то – **линейно независимой.**

В частности, для системы двух линейно зависимых векторов получим равенство $\vec{a}_1 = \beta\vec{a}_2$.

Для системы трех линейно зависимых векторов будет выполнено равенство $\vec{a}_3 = \beta_1\vec{a}_1 + \beta_2\vec{a}_2$. Значит, геометрически вектор $\vec{a}_3$ является диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\beta_1\vec{a}_1$ и $\beta_2\vec{a}_2$.

Свойства линейно зависимой и линейно независимой систем векторов

1. Система, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.
2. Если система векторов $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_k$ линейно независима, то любая часть этой системы $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_s$ ($s < k$) линейно независима.
3. Если система векторов $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_k$ линейно зависима, то любая дополненная система $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_k,\ \vec{a}_{k+1},\ \ldots,\ \vec{a}_{k+m}$ линейно зависима.
4. Система двух векторов является линейно зависимой тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарны.

5. Система векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ линейно зависима тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны.

6. Любые четыре вектора в трехмерном пространстве линейно зависимы.

Если в трехмерном пространстве взять 3 некомпланарных вектора, то любой вектор этого пространства можно разложить в линейную комбинацию данных трех векторов.

Пример. Определить, является ли данная система векторов $\vec{a}=(3,4,5), \vec{b}=(-3,0,5), \vec{c}=(4,4,4), \vec{d}=(3,4,0)$ линейно зависимой?

Решение: Векторы будут линейно зависимыми, так как размерность векторов меньше количества векторов.

Опр. **Базисом** называется любая совокупность линейно независимых векторов.

Опр. **Базисом на плоскости** V_2 называется совокупность любых двух линейно независимых векторов.

Опр. **Базисом в пространстве** V_3 называется совокупность любых трех линейно независимых векторов.

Из определений следует, что любые два неколлинеарных вектора образуют базис на плоскости, а любые три некомпланарных вектора образуют базис в пространстве.

Пусть векторы $\vec{a}_1, \ \vec{a}_2, \ \vec{a}_3$ не являются компланарными, тогда любой вектор $\vec{x}$ трехмерного пространства можно представить, как линейную комбинацию этих векторов

$$\vec{x}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\alpha_3\vec{a}_3. \qquad (5)$$

Представление вектора $\vec{x}$ в виде (5) называется **разложением вектора в базисе** $\vec{a}_1, \ \vec{a}_2, \ \vec{a}_3$, а числа $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ называются **координатами вектора** $\vec{x}$ в этом базисе.

Опр. Базис называется **ортогональным**, если он состоит из векторов, лежащих на взаимно перпендикулярных прямых. Базис называют

ортонормированным, если он ортогональный и состоит из единичных векторов.

Пример. Разложить вектор $\vec{d}=(-1;-6;-2)$ по векторам $\vec{a}=(3;2;-1)$, $\vec{b}=(1;4;3)$ и $\vec{c}=(2;-2;1)$.

Решение.

1) Проверим, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ могут образовывать базис.

Составим определитель из координат этих векторов и вычислим его.

$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=50\neq 0$, следовательно, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ - линейно независимы и образуют базис.

2) Аналогично формуле (5) запишем разложение вектора $\vec{d}$ по базису:

$\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ или

$$-1\vec{i}-6\vec{j}-2\vec{k}=x(3\vec{i}+2\vec{j}-1\vec{k})+y(1\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k})+z(2\vec{i}-2\vec{j}+1\vec{k}).$$

Приравнивая коэффициенты при ортах $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ слева и справа, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} -1=3x+y+2z, \\ -6=2x+4y-2z, \\ -2=-x+3y+z. \end{cases}$$

Решая эту систему находим, что $x=-2/5, y=-1, z=3/5$. тогда разложение вектора $\vec{d}$ по векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ имеет вид: $\vec{d}=-\frac{2}{5}\vec{a}-\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{c}.$

Ответ. $\vec{d}=-\frac{2}{5}\vec{a}-\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{c}.$

§7. Скалярное произведение векторов

7.1. Определение скалярного произведения и его свойства

<u>*Опр.*</u> **Скалярным произведением** двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

<u>*Обозначение*</u>: $\vec{a}\cdot\vec{b}$ или $\left(\vec{a};\vec{b}\right)$.

Тогда $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})}$.

Свойства скалярного произведения

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

2. $(\lambda\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$;

3. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$;

4. $\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2$.

В частности, $\vec{i}^{\,2}=\vec{j}^{\,2}=\vec{k}^{\,2}=1$. Заметим, что $\sqrt{\vec{a}^{\,2}}=\left|\vec{a}\right|$.

5. Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

В частности, $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$.

<u>*Пример.*</u> Найти длину вектора $\vec{c}=3\vec{a}-4\vec{b}$, если $\left|\vec{a}\right|=2$, $\left|\vec{b}\right|=3$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\pi}{3}$.

Решение.

Воспользуемся свойствами скалярного произведения:

$$|\vec{c}|=\sqrt{\vec{c}^{\,2}}=\sqrt{(3\vec{a}-4\vec{b})^2}=\sqrt{9\vec{a}^{\,2}-24\vec{a}\vec{b}+16\vec{b}^{\,2}}=$$

$$=\sqrt{9|\vec{a}|^2-24|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})+16|\vec{b}|^2}=\sqrt{9\cdot2^2-24\cdot2\cdot3\cdot\frac{1}{2}+16\cdot9}=\sqrt{108}=6\sqrt{3}.$$

Ответ: $|\vec{c}|=6\sqrt{3}$.

7.2. Выражение скалярного произведения через координаты

Пусть заданы два вектора: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$

Тогда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right) \cdot \left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \ ,$$

то есть, скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных координат.

Пример. Доказать, что диагонали четырехугольника, заданного координатами вершин $A(-4;-4;4)$, $B(-3;2;2)$, $C(2;5;1)$, $D(3;-2;2)$ взаимно перпендикулярны.

Решение.

Составим векторы, лежащие на диагоналях четырехугольника $ABCD$: $\overrightarrow{AC} = (6,9,-3), \overrightarrow{BD} = (6,-4,0)$.

Найдем их скалярное произведение:

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} == (6,9,-3) \cdot (6,-4,0) = 6 \cdot 6 + 9 \cdot (-4) + (-3) \cdot 0 = 0$.

Следовательно, векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ взаимно ортогональны, а значит, диагонали четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны.

7.3. Некоторые приложения скалярного произведения

1. Угол между векторами.

Угол φ между двумя ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется следующим образом:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|}}.$$

Пример: Найти угол между векторами $\vec{a} = (2;0;-2)$ и $\vec{b} = (2;2;-4)$.

Решение.

Найдем скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и их длины:

$\vec{a}\vec{b} = (2;0;-2)\cdot(2;2;-4) = 2\cdot 2 + 0\cdot 2 + (-2)\cdot(-4) = 12$,

$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$, $\vec{b} = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$.

Тогда $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \dfrac{12}{2\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}} = \dfrac{3}{4} = 0,75$.

Ответ: $\cos\varphi = 0,75$.

<u>2. Проекция вектора на заданное направление</u>.

Учитывая определение проекции вектора на ось, формулу скалярного произведения векторов можно записать иначе: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cdot\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$

. Следовательно, например, проекция вектора $\vec{a}$ на заданное направление $\vec{b}$ может быть вычислено по формуле:

$$\boxed{\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}}.$$

<u>3. Работа постоянной силы</u>.

Пусть материальная точка перемещается прямолинейно из положения A в положение B под действием постоянной силы $\vec{F}$, образующей угол φ с перемещением $\overrightarrow{AB} = \vec{s}$. Из физики известно, что работа силы $\vec{F}$ при перемещении $\vec{s}$ равна $A = |\vec{F}|\cdot|\vec{s}|\cos\varphi$, т.е. $\boxed{A = \vec{F}\cdot\vec{s}}$.

<u>Пример.</u> Вычислить работу, произведенную силой $\vec{F} = (3;\,2;\,4)$, если точка ее приложения перемещается прямолинейно из положения $A(2;-4;6)$ в положение $B(4;2;7)$. Под каким углом к $\overrightarrow{AB}$ направлена сила $\vec{F}$?

Решение.

Найдем $\vec{s} = \overrightarrow{AB} = (2,-2,1)$, тогда $A = \vec{F} \cdot \vec{s} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 7 = 38$ (ед. работы) и

$$\cos\varphi = \frac{\vec{F} \cdot \vec{s}}{\left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{s}\right|} = \frac{38}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 4^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{38}{3\sqrt{29}}.$$

Ответ: $A = 38$, $\varphi = \arccos\dfrac{38}{3\sqrt{29}}$.