Аналитическая геометрия

Модуль 1. Матричная алгебра. Векторная алгебра

<u>Текст 3 (самостоятельное изучение)</u>

Аннотация

Однородные СЛАУ, их совместность. Критерий существования ненулевого решения однородной СЛАУ, его следствие для «квадратных» систем. Свойства решений однородной СЛАУ. Фундаментальная система решений однородной СЛАУ. Структура общего решения однородной СЛАУ. Структура общего решения неоднородной.

5.5. Однородные системы линейных уравнений. Фундаментальный набор решений

Пусть дана система линейных однородных уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна, так как $r(A) = r(\widetilde{A})$, следовательно, она всегда имеет **нулевое** (**тривиальное**) решение $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

При каких условиях однородная система имеет и ненулевые решения?

<u>*Теорема*</u>. Для того, чтобы однородная система из m линейных уравнений с n неизвестными имела ненулевое решение необходимо и достаточно, чтобы ранг r ее основной матрицы был меньше числа n неизвестных, т.е. $r < n$.

Из теоремы следует, что в случае квадратной матрицы A будем иметь:

1) если $\det A \neq 0$, то система имеет единственное нулевое решение;

2) если $\det A = 0$, то система имеет бесконечно много решений.

<u>*Пример.*</u> Решить систему уравнений

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad\quad = 0. \end{cases}$

Решение.

Определитель основной матрицы системы $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$,

следовательно, система имеет тривиальное решение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

б) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 0. \end{cases}$

Решение.

Определитель основной матрицы системы

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 7 & 13 \end{vmatrix} = 0,$$

следовательно, система имеет бесконечно много решений. Ранг $r(A) = 2$ $\left(\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \right)$. Переменные x_1, x_2 - базисные, x_3 - свободная. Приведем матрицу системы к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 7 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & -5 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и запишем соответствующую преобразованной матрице систему, в которой свободные переменные перенесем в правую часть:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = -4x_3, \\ -5x_2 = -3x_3. \end{cases}$$

Отсюда, полагая свободную переменную $x_3 = C$, найдем общее решение системы:

$$\begin{cases} x_1 = -5{,}8C, \\ x_2 = 0{,}6C_3, \\ x_3 = C. \end{cases}$$

Теорема. Если столбцы $X_1, X_2, ..., X_s$ - решения однородной системы (4), то любая их линейная комбинация также является решение этой системы.

Опр. Любой набор $k = n - r$ линейно независимых столбцов , являющихся решениями однородной СЛАУ (4), где n - количество неизвестных в системе, а r - ранг ее матрицы A, называют **фундаментальной системой решений** этой однородной СЛАУ.

Опр. Фундаментальный набор решений, у которого все значения неизвестных равны нулю, кроме одного, равного единице, называется **нормальным**.

Теорема (о структуре общего решения однородной СЛАУ). Если $F_1, F_2, ..., F_k$ - произвольная фундаментальная система решений однородной СЛАУ (4), то любое ее решение X можно представить в виде

$$X = C_1F_1 + C_2F_2 + ... + C_kF_k,$$

где $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_k$ - некоторые постоянные.

Пример. Найти фундаментальную систему решений однородной линейной системы

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}.$$

Решение.

Найдем $r(A)$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -6 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -6 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & -6 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -6 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -6 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выберем в качестве базисного минора $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. Значит, $r(A)$=2. Пусть x_4, x_5 – базисные неизвестные, x_1, x_2, x_3 – свободные неизвестные. Запишем для них новую систему:

$$\begin{cases} 4x_4 - x_5 = -2x_1 + x_2 - 3x_3 \\ 5x_4 = -x_1 + 6x_2 - 4x_3 \end{cases},$$

откуда

$$\begin{cases} x_4 = \dfrac{-x_1 + 6x_2 - 4x_3}{5}, \\ x_5 = \dfrac{6x_1 + 19x_2 - x_3}{5}. \end{cases}.$$

Фундаментальная система решений состоит из трех столбцов (количество свободных переменных). Рассмотрим три набора значений свободных неизвестных:

1) $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 0$.

Тогда x_4=-0,2, x_5 =1,2, и решение можно записать в виде столбца

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -0,2 \\ 1,2 \end{pmatrix}.$$

2) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$.

При этом $x_4 = 1,2$, $x_5 = 3,8$, и следующее решение системы имеет вид

$$F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1,2 \\ 3,8 \end{pmatrix}.$$

3) $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

Отсюда $x_4 = -0,8$, $x_5 = -0,2$, и последний столбец -

$$F_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -0,8 \\ -0,2 \end{pmatrix}.$$

Построена нормальная фундаментальная система решений F_1, F_2, F_3. Поскольку столбцы свободных неизвестных $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ линейно независимы, это гарантирует линейную независимость решений F_1, F_2, F_3.

Итак, в качестве фундаментальной системы решений можно выбрать

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-0,2\\1,2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1,2\\3,8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-0,8\\-0,2\end{pmatrix}.$$

При этом любое решение данной системы имеет вид: $X = c_1F_1 + c_2F_2 + c_3F_3$, где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные. Эта формула задает **общее решение** системы.

Пример. Общее решение $\begin{cases} x_1 = -5,8C, \\ x_2 = 0,6C, \\ x_3 = C. \end{cases}$ однородной СЛАУ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 0 \end{cases}$

можно представить в виде:

$$X = \begin{pmatrix}-5,8C\\0,6C\\C\end{pmatrix} = C\begin{pmatrix}-5,8\\0,6\\1\end{pmatrix} = C \cdot F,$$

где C – произвольная постоянная, $F = \begin{pmatrix}-5,8\\0,6\\1\end{pmatrix}$ - фундаментальная система решений.

Теорема (о структуре произвольного решения неоднородной СЛАУ). Пусть столбец X^* - частное решение неоднородной системы $AX = B$, а столбец X° - решение соответствующей однородной системы $AX = O$. Произвольный столбец X является решением этой системы $AX = B$ тогда и только тогда, когда он имеет представление $X = X^* + X^\circ$.

<u>Теорема</u> (о структуре общего решения неоднородной СЛАУ). Пусть столбец X^*- частное решение неоднородной системы $AX = B$ и известна фундаментальная система решений $F_1, F_2, ..., F_3$ соответствующей однородной системы $AX = O$. Тогда общее решение СЛАУ $AX = B$ можно представить в виде $X = X^* + C_1F_1 + C_2F_2 + ... + C_kF_k$, где C_i $(i = \overline{1, n})$ -произвольные постоянные.

<u>Пример.</u> Найти общее решение неоднородной линейной системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 3x_1 + 4x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 5 \end{cases}$$

с помощью фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы.

Решение.

Убедимся в том, что система совместна:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right).$$

Итак, $r(A) = r(\widetilde{A}) = 2 < 5$ (число неизвестных n равно 5), следовательно, система совместна и имеет бесчисленное множество решений.

Составим по преобразованной матрице соответствующую однородную систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$

и найдем для нее фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 - x_4 - x_5, \\ 3x_1 = -4x_3 + 3x_4 - 6x_5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-4x_3 + 3x_4 - 6x_5}{3}, \\ x_2 = \dfrac{x_3 - 6x_4 + 3x_5}{3}. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений может быть такой:

$$F_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; F_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; F_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем какое-нибудь частное решение неоднородной системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ 3x_1 + 4x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 5 \end{cases}.$$

Положим $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, тогда $x_1 = \dfrac{5}{3}$, $x_2 = \dfrac{1}{3}$. Следовательно,

$$X_{\text{част.}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

и общее решение системы имеет вид:

$$X = c_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные.