Аналитическая геометрия

Модуль 1. Матричная алгебра. Векторная алгебра

<u>Текст 1 (самостоятельное изучение)</u>

Аннотация

Определитель матрицы произвольного порядка, его свойства. Вычисление определителей 2-ого и 3-его порядков. Определитель транспонированной матрицы. Определитель произведения двух квадратных матриц. Миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы. Разложения определителя по строке или столбцу.

§2. Определители матриц

2.1. Понятие определителя

Понятие определителя является одним из важнейших в линейной алгебре. Определитель является характеристикой квадратной матрицы.

<u>Опр</u>. Каждой квадратной матрице A порядка n можно сопоставить число, полученное по некоторому правилу из элементов этой матрицы. Это число называется **определителем** матрицы.

Определитель матрицы n-го порядка называется определителем n-го порядка и обозначается:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Употребляются также следующие обозначения: $\det A$, $\det(a_{ij})$, Δ, ΔA, $|A|$.

Рассмотрим частные случаи вычисления определителей:

1) $n=1$, тогда $\det A = |a_{11}| = a_{11}$;

2) $n=2$, $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ (из произведения элементов, стоящих на главной диагонали матрицы, вычитается произведение элементов, находящихся на побочной диагонали).

<u>*Пример*</u>. Найти определители матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Решение.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 5 - 3\cdot 2 = -1,\ |B| = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

3) $n=3$, $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$

$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$.

При вычислении определителя 3-го порядка удобно пользоваться **правилом треугольников** (Саррюса). Оно заключается в следующем: элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «+», располагаются так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

образуя два равнобедренных треугольника, симметричных относительно главной диагонали. Элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «-», располагаются аналогичным образом относительно побочной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

<u>*Пример*</u>. Вычислить определитель:

а) $$\Delta=\begin{vmatrix}5 & -2 & 1\\ 3 & 1 & -4\\ 6 & 0 & -3\end{vmatrix}=5\cdot1\cdot(-3)+(-2)\cdot(-4)\cdot6+3\cdot0\cdot1-$$

$$-6\cdot1\cdot1-5\cdot0\cdot(-4)-3\cdot(-2)\cdot(-3)=9;$$

б) $$\Delta=\begin{vmatrix}12 & -4 & 7\\ 0 & -3 & 15\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=-72.$$

Замечание. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.

2.2. Миноры и алгебраические дополнения

Чтобы отметить общую закономерность в выражениях определителя второго и третьего порядков, необходимо ввести понятия минора и алгебраического дополнения.

Опр. **Минором** M_{ij} элемента a_{ij} определителя *n*-го порядка называется некоторый определитель (*n-1*)-го порядка, который получается из определителя *n*-го порядка вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}, т.е. строку с номером *i* и столбца с номером *j*.

Пример.

Если $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & 5 & 7\\ -2 & 1 & 0\end{vmatrix}$, то $M_{11}=\begin{vmatrix}5 & 7\\ 1 & 0\end{vmatrix}=5\cdot0-1\cdot7=-7$, $M_{32}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 7\end{vmatrix}=7$.

Опр. **Алгебраическим дополнением** A_{ij} элемента a_{ij} определителя *n*-го порядка называется число, равное $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Пример. Если

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -5 & -2 & 1 \end{vmatrix}, \text{ то } A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4-3) = -1.$$

2.3. Свойства определителей

1^0. Определитель не изменится, если к элементам какого-либо ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на любое число.

2^0. При перестановке двух параллельных рядов знак определителя поменяется на противоположный.

3^0. Определитель равен нулю, если он имеет:

- нулевой ряд;
- хотя бы две одинаковые строки (столбца);
- хотя бы две строки (столбца), элементы которых пропорциональны;
- хотя бы одну строку (столбец), являющуюся линейной комбинацией других строк (столбцов).

4^0. Общий множитель элементов какой-либо строки (столбца) определителя можно вынести за знак определителя.

5^0. Определитель не меняется при транспонировании.

6^0. Если элементы какого-либо ряда определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму соответствующих определителей.

7^0. Сумма произведений элементов какого-либо ряда определителя на алгебраические дополнения к соответствующим элементам другого ряда равна нулю.

Например, рассмотрим определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

Найдем сумму произведений элементов первой строки определителя на алгебраические дополнения элементов второй строки. Тогда имеем:

$$-3\cdot A_{21}+1\cdot A_{22}+0\cdot A_{23}=$$

$$=3\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 5\\ 3 & 0\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 5\\ 1 & 0\end{vmatrix}+5\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-$$

$$=-3\cdot(-15)+1\cdot(-5)+5\cdot 10=0.$$

8^0. (Разложение определителя по элементам какой-либо строки или столбца) (способ вычисления определителей). Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любого ряда матрицы на их алгебраические дополнения, т.е. $\det A=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$.

<u>*Пример*</u>. Вычислить определитель $\Delta=\begin{vmatrix}2 & -3 & 5\\ 1 & 0 & -4\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}$.

Решение.

Вычислим определитель с помощью разложения по строке. Для удобства вычисления выберем 2-ю строку, содержащую нулевой элемент (a_{22}=0), поскольку при этом нет необходимости находить алгебраическое дополнение A_{22}, так как произведение $a_{22}A_{22}=0$. Итак,

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 5\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1\cdot(-3\cdot(-1)-5\cdot 1)=2;$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1\cdot(2\cdot 1-(-3)\cdot 2)=-8$$

(напомним, что определитель второго порядка, входящий в алгебраическое дополнение A_{ij}, получается вычеркиванием из исходного определителя i-й строки и j-го столбца).

Тогда $\Delta = a_{21}\, A_{21} + a_{23}\, A_{23}$ = 1·2 + (-4)(-8) = 34.

Ответ: Δ = 34.

<u>*Замечание.*</u> Это свойство позволяет свести вычисление определителя n-го порядка к определителю порядка $(n\text{-}1)$-го. В целом громоздкая процедура,

однако ее можно заметно упростить, если воспользоваться другими свойствами определителя, например, свойством 1^0, которое позволяет свести определитель к треугольному виду. Как было отмечено выше, он будет равен произведению элементов главной диагонали.

Пример. Вычислить определитель 4-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Преобразуем определитель так, чтобы три из четырех элементов какой-либо строки или столбца стали равными нулю. Для этого воспользуемся свойством 1^0. Его особенно удобно применять, если в определителе существует элемент, равный ± 1. Выберем в качестве такого элемента $a_{13}=1$ и с его помощью обратим все остальные элементы 3-го столбца в нули. С этой целью:

а) к элементам 2-й строки прибавим соответствующие элементы 1-й строки;

б) из элементов 3-й строки вычтем элементы 1-й строки, умноженные на 2;

в) из элементов 4-й строки вычтем элементы 1-й строки (напомним, что при этом величина определителя не изменится). Тогда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложим полученный определитель по 3-му столбцу:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из элементов 1-й строки нового определителя удвоенные элементы 2-й строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

и разложим этот определитель по 1-й строке:

$$\Delta = -3\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3\cdot 1\cdot(0-3\cdot(-1)) = -9.$$

Ответ: $\Delta = -9$.

Вычислить определитель (самостоятельно)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 14 & -1 & 7 \\ 2 & 8 & 5 & 4 \\ 4 & 20 & 3 & 6 \\ -5 & -6 & 2 & -19 \end{vmatrix} = -544;\ \Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 & 6 \\ -2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -280$$

9^0. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц.

2.4. Применение встроенных функций MS Excel

Математическая функция *МОПРЕД* мастера функций f_x *MS Excel* позволяет быстро вычислить определитель матрицы. Для этого необходимо выполнить следующий переход: f_x → *Математические* → *МОПРЕД* → *ОК*. Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. В графе *массив* указывается ссылка на ячейки, содержащие элементы определителя. После этого нажимается *ОК*.