Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Аналитическая геометрия

Модуль 1. Матричная алгебра. Векторная алгебра

Лекция 1.3

к.ф.-м.н. Меньшова И.В.

Системы линейных уравнений

Определение

Системой из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными (сокращенно СЛАУ) называется система вида

Определение

Системой из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными (сокращенно СЛАУ) называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

Определение (продолжение)

где числа a_{ij} - это **коэффициенты** системы,

Определение (продолжение)

где числа a_{ij} - это **коэффициенты** системы,
числа b_i – **свободные члены**,

Определение (продолжение)

где числа a_{ij} - это **коэффициенты** системы, числа b_i – **свободные члены**, $x_1, \ldots, x_n$ - **неизвестные**, которые надо определить.

Запись СЛАУ в виде (1) называется **координатной**.

Запись СЛАУ в виде (1) называется **координатной**. Эту систему можно записать в **матричной** форме

$$A \cdot x = b, \tag{2}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ – матрица системы,}$$

Системы линейных уравнений

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – столбец неизвестных,

Системы линейных уравнений

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – столбец неизвестных,

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$ – столбец свободных членов.

Обозначим столбцы матрицы A как

Обозначим столбцы матрицы A как

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ \dots, \ a_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тогда получим еще одну форму записи системы:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b. \tag{3}$$

Тогда получим еще одну форму записи системы:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b. \qquad (3)$$

Соотношение (3) называют **векторной** записью системы.

Тогда получим еще одну форму записи системы:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b. \qquad (3)$$

Соотношение (3) называют **векторной** записью системы. Она показывает, что решение системы (1) можно трактовать, как представление столбца b в виде линейной комбинации столбцов $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Определение

Расширенной матрицей системы (1) называется матрица $\widetilde{A}$ (или $A|\, b$) вида

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Определение

Система (1) называется **однородной**, если $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, в противном случае она называется **неоднородной**.

Определение

Решением СЛАУ называется такой набор значений неизвестных $x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_n^\circ$, который при подстановке в каждое уравнение системы (1) обращает его в верное тождество.

Решить СЛАУ – значит:

Решить СЛАУ – значит:

1) выяснить, имеет ли СЛАУ решения;

Решить СЛАУ – значит:

1) выяснить, имеет ли СЛАУ решения;

2) найти все решения, если они существуют.

Определение

Система (1) называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение и **несовместной**, если решений не имеет.

Определение

Совместная система называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое конкретное решение называется **частным** решением системы.

Определение

Совокупность всех частных решений называется **общим** решением системы.

Замечание.

Замечание. Однородная СЛАУ всегда совместна, поскольку нулевой набор значений ее неизвестных всегда является решением.

Замечание. Однородная СЛАУ всегда совместна, поскольку нулевой набор значений ее неизвестных всегда является решением. Это решение называется **нулевым** или **тривиальным**.

Определение
Две системы называются **равносильными** или **эквивалентными**, если они имеют одно и то же множество решений.

Эквивалентные системы получаются, в частности, с помощью элементарных преобразований над строками матрицы A.

Критерий совместности СЛАУ

Теорема Кронекера-Капелли (о совместности СЛАУ)

Критерий совместности СЛАУ

Теорема Кронекера-Капелли (о совместности СЛАУ)
Для совместности системы (1) необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы A был равен рангу ее расширенной матрицы $\widetilde{A}$.

Критерий совместности СЛАУ

Для совместных СЛАУ верны следующие *утверждения*:

Для совместных СЛАУ верны следующие *утверждения*:

1. Если ранг совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

Критерий совместности СЛАУ

Для совместных СЛАУ верны следующие *утверждения*:

1. Если ранг совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

2. Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений.

Критерий совместности СЛАУ

Определение

Пусть ранг матрицы совместной системы r меньше числа неизвестных n. Тогда переменные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ называют **основными** (или **базисными**), если определитель матрицы, составленный из коэффициентов при них (базисный минор) отличен от нуля. Остальные $n - r$ переменных называются **неосновными** (или **свободными**).

Матричный метод решения СЛАУ

Матричный метод решения СЛАУ

Рассмотрим систему из n линейных уравнений с n неизвестными

Рассмотрим систему из n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{4}$$

или в матричной форме

$$Ax = b. \tag{5}$$

Здесь матрица A системы является квадратной.

Матричный метод решения СЛАУ

Определение
Определитель матрицы системы $\Delta = \det A$ называется **определителем системы** (4).

Определение

Если определитель системы (4) отличен от нуля, то система называется **невырожденной**.

Теорема (о существовании решения)

Матричный метод решения СЛАУ

Теорема (о существовании решения)
Система (4) имеет решение и притом единственное, если определитель матрицы системы $\Delta \neq 0$.

Матричный метод решения СЛАУ

Пусть $\Delta \neq 0$ и, следовательно, матрица A невырожденная, а значит существует обратная матрица A^{-1}.

Матричный метод решения СЛАУ

Пусть $\Delta \neq 0$ и, следовательно, матрица A невырожденная, а значит существует обратная матрица A^{-1}. Умножив обе части уравнения (5) слева на матрицу A^{-1}, получим:

Пусть $\Delta \neq 0$ и, следовательно, матрица A невырожденная, а значит существует обратная матрица A^{-1}. Умножив обе части уравнения (5) слева на матрицу A^{-1}, получим:

$$x = A^{-1} \cdot b. \tag{6}$$

Отыскание решения системы (4) по формуле (6) называется **матричным методом решения системы**.

Матричный метод решения СЛАУ

Пример.

Пример. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ \qquad -2x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

Матричный метод решения СЛАУ

Решение.

Матричный метод решения СЛАУ

Решение.

Данную систему можно представить в виде:

$Ax = b$,

Матричный метод решения СЛАУ

Решение.

Данную систему можно представить в виде:

$Ax = b$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

1) Найдем обратную матрицу A^{-1}:

Матричный метод решения СЛАУ

1) Найдем обратную матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} = -\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & -7 \\ -2 & 1 & 7 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix} =$$

Матричный метод решения СЛАУ

1) Найдем обратную матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} = -\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & -7 \\ -2 & 1 & 7 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1/7 & 4/7 & 1 \\ 2/7 & -1/7 & -1 \\ 4/7 & -2/7 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матричный метод решения СЛАУ

2) Решение системы определим по формуле (6):

Матричный метод решения СЛАУ

2) Решение системы определим по формуле (6):

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/7 & 4/7 & 1 \\ 2/7 & -1/7 & -1 \\ 4/7 & -2/7 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} =$$

2) Решение системы определим по формуле (6):

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/7 & 4/7 & 1 \\ 2/7 & -1/7 & -1 \\ 4/7 & -2/7 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Решение системы: $x_1 = 6, x_2 = -5, x_3 = -3.$

Метод Крамера

Рассмотрим СЛАУ вида (4).

Рассмотрим СЛАУ вида (4). Запишем равенство (6) в развернутом виде:

Рассмотрим СЛАУ вида (4). Запишем равенство (6) в развернутом виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

т.е.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{\det A} \cdot (A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n) \\
x_2 &= \frac{1}{\det A} \cdot (A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n) \qquad (7) \\
x_n &= \frac{1}{\det A} \cdot (A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n)
\end{aligned}
$$

Метод Крамера

Можно заметить, что суммы, представленные в скобках равенств (7) есть разложения определителей, полученных из определителя матрицы A заменой соответствующих столбцов с номерами $1, 2, \ldots, n$ столбцом свободных членов b.

Метод Крамера

Тогда получим формулы для вычисления решений системы (4):

Тогда получим формулы для вычисления решений системы (4):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \tag{8}$$

Тогда получим формулы для вычисления решений системы (4):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \qquad (8)$$

где

$$\Delta = \det A,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

Метод Крамера

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

Метод Крамера

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$\dots,$

Метод Крамера

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\dots, \ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Формулы (8) называются **формулами Крамера**, а метод решения невырожденных систем по формулам (8) – **методом Крамера**.

Пример.

Пример. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

Решение.

Решение.

1) Вычислим определитель системы:

Решение.

1) Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

Решение.

1) Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то данная система является невырожденной и можно найти ее решение по формулам (8).

Метод Крамера

2) Найдем определители Δ_1, Δ_2 и Δ_3, заменяя в определителе Δ первый, второй и третий столбцы соответственно столбцом свободных членов b:

2) Найдем определители Δ_1, Δ_2 и Δ_3, заменяя в определителе Δ первый, второй и третий столбцы соответственно столбцом свободных членов b:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = -8,$$

2) Найдем определители Δ_1, Δ_2 и Δ_3, заменяя в определителе Δ первый, второй и третий столбцы соответственно столбцом свободных членов b:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = -8,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4,$$

2) Найдем определители Δ_1, Δ_2 и Δ_3, заменяя в определителе Δ первый, второй и третий столбцы соответственно столбцом свободных членов b:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = -8,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

3) Найдем решение системы по формулам Крамера:

3) Найдем решение системы по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{-8}{-4} = 2, x_2 = \frac{4}{-4} = -1, x_3 = \frac{-4}{-4} = 1.$$

Метод Гаусса

Пусть задана система m линейных уравнений с n неизвестными вида (1).

Метод Гаусса

Пусть задана система m линейных уравнений с n неизвестными вида (1).
Решение системы (1) методом Гаусса заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого вида (*прямой ход*)

Метод Гаусса

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{rr}x_r + \ldots + a_{rn}x_n = b_r, \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\quad a_{rr}x_r + \ldots + a_{rn}x_n = b_r, \end{cases} \tag{9}$$

из которой последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные (*обратный ход*).

Алгоритм решения СЛАУ методом Гаусса:

Алгоритм решения СЛАУ методом Гаусса:
1. Записать расширенную матрицу $\widetilde{A}$, отвечающую системе уравнений (1).

Алгоритм решения СЛАУ методом Гаусса:
1. Записать расширенную матрицу $\widetilde{A}$, отвечающую системе уравнений (1).
2. Элементарными преобразованиями привести расширенную матрицу $\widetilde{A}$ к ступенчатому виду (прямой ход метода Гаусса).

Метод Гаусса

Алгоритм решения СЛАУ методом Гаусса:
3. Провести исследование совместности СЛАУ, используя теорему Кронекера-Капелли:

Алгоритм решения СЛАУ методом Гаусса:

3. Провести исследование совместности СЛАУ, используя теорему Кронекера-Капелли:

а) если $\boldsymbol{rang A = rang \widetilde{A} = n}$, где n – число неизвестных, то СЛАУ совместна и определена (имеет единственное решение);

Алгоритм решения СЛАУ методом Гаусса:
3. Провести исследование совместности СЛАУ, используя теорему Кронекера-Капелли:
б) если $rangA = rang\widetilde{A} \neq n$, где n – число неизвестных, то СЛАУ совместна и не определена (имеет бесконечное множество решений);

Метод Гаусса

Алгоритм решения СЛАУ методом Гаусса:

3. Провести исследование совместности СЛАУ, используя теорему Кронекера-Капелли:

в) если $rang A \neq rang \widetilde{A}$, то СЛАУ не совместна.

Алгоритм решения СЛАУ методом Гаусса:
4. Записать ступенчатую СЛАУ (обратный ход метода Гаусса).

Метод Гаусса

Алгоритм решения СЛАУ методом Гаусса:

4. Записать ступенчатую СЛАУ (обратный ход метода Гаусса).

а) $rangA = rang\widetilde{A} = n$. Последовательно найти $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$.

Алгоритм решения СЛАУ методом Гаусса:
4. Записать ступенчатую СЛАУ (обратный ход метода Гаусса).
б) Случай $rangA = rang\widetilde{A} \neq n$. В качестве базисных переменных выберем неизвестные с которых начинаются уравнения ступенчатой системы. Остальные переменные – свободные. Выразим базисные переменные через свободные, получая тем самым общее решение СЛАУ.

Алгоритм решения СЛАУ методом Гаусса:
4. Записать ступенчатую СЛАУ (обратный ход метода Гаусса).
в) Случай $rang A \neq rang \widetilde{A}$. СЛАУ решений не имеет.

Пример.

Пример. Найти общее и одно частное решения системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 10x_4 = -4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 14. \end{cases}$$

Решение.

Решение.

1) Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

Решение.

1) Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 10 \\ 2 & -1 & 5 & 10 & -4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 5 & 5 & 14 \end{array}\right)$$

Решение.

1) Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 10 \\ 2 & -1 & 5 & 10 & -4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 5 & 5 & 14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 10 \\ 0 & 3 & 3 & 12 & -24 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & 8 & -16 \end{array}\right)$$

Решение.

1) Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

2) $r(A) = r(\widetilde{A}) = 2$, количество неизвестных $n = 4$.

2) $r(A) = r(\widetilde{A}) = 2$, количество неизвестных $n = 4$. Вывод: система совместна и имеет бесконечно много решений.

3) Выпишем систему уравнений, соответствующую полученной ступенчатой матрице:

3) Выпишем систему уравнений, соответствующую полученной ступенчатой матрице:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 10, \\ \qquad\quad x_2 + x_3 + 4x_4 = -8. \end{cases}$$

3) Выпишем систему уравнений, соответствующую полученной ступенчатой матрице:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 10, \\ \qquad\;\; x_2 + x_3 + 4x_4 = -8. \end{cases}$$

Так как $r(A) = 2$, то базисных неизвестных будет две.

В качестве базисных неизвестных можно выбрать x_1, x_2,

Метод Гаусса

В качестве базисных неизвестных можно выбрать x_1, x_2, поскольку минор $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ состоит из коэффициентов при этих переменных.

Тогда неизвестные x_3, x_4 будут свободными.

Перенесем слагаемые, содержащие свободные неизвестные, в правую часть уравнений, получим систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 10 - x_3 + x_4, \\ x_2 = -8 - x_3 - 4x_4. \end{cases}$$

4) Методом обратного хода найдем выражения базисных неизвестных через свободные.

4) Методом обратного хода найдем выражения базисных неизвестных через свободные. Пусть переменные $x_3 = C_1, x_4 = C_2$, C_1, C_2 - произвольные постоянные.

4) Методом обратного хода найдем выражения базисных неизвестных через свободные. Пусть переменные $x_3 = C_1, x_4 = C_2$, C_1, C_2 - произвольные постоянные. Тогда

$$\begin{cases} x_1 = 6 + C_1 - 7C_2, \\ x_2 = -8 - C_1 - 4C_2. \end{cases}$$

Общее решение системы:

$$\begin{cases} x_1 = 6 + C_1 - 7C_2, \\ x_2 = -8 - C_1 - 4C_2, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$$

5) Придавая постоянным C_1, C_2 произвольные значения, получим частные решения. Пусть $C_1 = 0, C_2 = 1$, тогда получим частное решение

$$\begin{cases} x_1 = -13, \\ x_2 = -12, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 1. \end{cases}$$