Аналитическая геометрия
Модуль 1. Матричная алгебра. Векторная алгебра
Лекция 1.5

Аннотация

Ориентация базиса, правые и левые тройки векторов. Векторное произведение двух векторов, его геометрический и механический смысл. Алгебраические свойства векторного произведения. Вычисление векторного произведения в ортонормированном базисе. Смешанное произведение векторов, его геометрический смысл. Алгебраические свойства смешанного произведения. Вычисление смешанного произведения в ортонормированном базисе. Условие компланарности трех векторов.

1 Векторное произведение векторов

Определение

Три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, взятые в указанном порядке, образуют **правую тройку**, если с конца третьего вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки, и **левую**, если по часовой.

Определение

Так как три некомпланарных вектора образуют базис в V_3, то также говорят о **правых** и **левых базисах.** Каждый базис является либо правым, либо левым, т.е. все базисы в V_3 разделяются на два класса: класс правых базисов и класс левых базисов. Класс, к которому относится фиксированный базис, называется его **ориентацией**.

Определение

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который удовлетворяет условиям:

1) перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. $\vec{c}\perp\vec{a}$ и $\vec{c}\perp\vec{b}$;

2) имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах, т.е.

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b});$$

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку.

Обозначение: $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Свойства векторного произведения

1. При перестановке множителей векторное произведение меняет знак на противоположный, то есть, $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$.

2. $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\lambda\vec{b}\right)$, где $\lambda \in \mathrm{R}$.

3. Два ненулевых вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно $\vec{0}$, то есть $\vec{a}||\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$.

4. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

2 Выражение векторного произведения через координаты векторов

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ разложены по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$. Тогда, используя свойства векторного произведения, перемножая эти векторы как многочлены, найдем, что

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Или полученную формулу записывают короче в виде:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

(раскладывать можно только по первой строке!).

3 Некоторые приложения векторного произведения

1. Установление коллинеарности векторов.

Пример. Выяснить, лежат ли точки $A\,(4;-2;6)$, $B\,(1;8;-2)$, $C\,(-4;3;2)$ на одной прямой?

Решение.

1. Составим векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB}=(1-4;8-(-2);-2-6)=(-3;10;-8)$,

$\overrightarrow{AC}=(-4-4;3-(-2);2-6)=(-8;5;-4)$.

2. Найдем векторное произведение этих векторов:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 10 & -8\\ -8 & 5 & -4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}10 & -8\\ 5 & -4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-3 & -8\\ -8 & -4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-3 & 10\\ -8 & 5\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$=0\vec{i}+52\vec{j}+65\vec{k}\neq\vec{0}.$$

Это значит, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ - неколлинеарны и, следовательно, точки A, B и C не могут лежать на одной прямой.

Ответ: не лежат.

2. Нахождение площади параллелограмма и треугольника.

По определению векторного произведения $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\vec{a},\vec{b})$. Эту формулу можно использовать для нахождения площади параллелограмма и треугольника, т.е. $S_{\text{пар}}=|\vec{a}\times\vec{b}|$ и, значит, $S_{\Delta}=\dfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$.

Пример. Найти площадь треугольника с вершинами $A\,(5;2;-1)$, $B\,(3;1;-2)$, $C\,(4;-2;2)$.

Решение.

1. Найдем векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:
$\overrightarrow{AB}=(3-5;1-2;-2-(-1))=(-2;-1;-1)$,
$\overrightarrow{AC}=(4-5;-2-2;2-(-1))=(-1;-4;3)$.

2. Вычислим векторное произведение:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & -1 & -1\\ -1 & -4 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -4 & 3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -1 & -4\end{vmatrix}\vec{k}=$$
$$=-7\vec{i}+7\vec{j}+7\vec{k}.$$

3. $S_\Delta=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{7^2+7^2+7^2}=\dfrac{7}{2}\sqrt{3}$(кв.ед).

Ответ: $S_\Delta=\dfrac{7}{2}\sqrt{3}$(кв.ед).

Пример. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{m}+2\vec{n}$ и $\vec{b}=2\vec{m}+\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - единичные векторы, образующие угол 30°.

Решение.

1. Найдем векторное произведение:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(\vec{m}+2\vec{n})\times(2\vec{m}+\vec{n})=2(\vec{m}\times\vec{m})+\vec{m}\times\vec{n}+4(\vec{n}\times\vec{m})+2(\vec{n}\times\vec{n})=$$
$$=\vec{m}\times\vec{n}-4(\vec{m}\times\vec{n})=-3(\vec{m}\times\vec{n}).$$

2. Вычислим модуль векторного произведения:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=|-3(\vec{m}\times\vec{n})|=3\cdot|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\sin 30=3\cdot1\cdot1\cdot1/2=1,5.$$

3. $S_{\text{пар}}=|\vec{a}\times\vec{b}|=1,5$.

Ответ: $S_{\text{пар}}=1,5$.

3. Определение момента силы относительно точки.

Пусть в точке A приложена сила $\overrightarrow{F}=\overrightarrow{AB}$ и пусть O – некоторая точка пространства. Из физики известно, что**моментом силы** $\overrightarrow{F}$ относительно точки O называется вектор $\vec{m}$, который проходит через точку O и:

а) перпендикулярен плоскости, проходящей через точки O, A, B;

б) численно равен произведению силы на плечо

$|\vec{m}| = |\overrightarrow{F}| \cdot ON = |\overrightarrow{F}| \cdot |r| \cdot \sin\varphi = |\overrightarrow{F}| \cdot |\overrightarrow{OA}| \sin(\widehat{\overrightarrow{F}, \overrightarrow{OA}})$;

в) образует правую тройку с векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{AB}$.

Следовательно, $\vec{m} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{F}$.

Пример. Сила $\overrightarrow{F} = (2, -4, 5)$ приложена к точке $A(4, -2, 3)$. Определить момент этой силы относительно точки $O(3, 2, -1)$.

Решение.

Найдем вектор $\overrightarrow{OA} = (4 - 3; -2 - 2; -1 - 3) = (1; -4; -4)$. Тогда момент $\vec{m}$ силы $\overrightarrow{F}$ относительно точки O равен:

$$\vec{m} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -4 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= -36\vec{i} - 13\vec{j} + 4\vec{k} = (-36; -13; 4).$$

Ответ: $\vec{m} = (-36; -13; 4)$.

4 Смешанное произведение векторов

Определение

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$ - скалярному произведению векторного произведения первых двух векторов и третьего вектора.

Обозначение: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Геометрическая интерпретация смешанного произведения

На трех некомпланарных векторах $\vec{a}$,$\vec{b}$ и $\vec{c}$ построим параллелепипед как на ребрах, выходящих из одной вершины. Тогда объем построенного параллелепипеда будет численно равен значению смешанного произведения векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и взятому со знаком «плюс», если тройка векторов правая, со знаком «минус», если тройка – левая.

Свойства смешанного произведения.

1. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$ (циклическая перестановка).

2. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ (перестановка местами знаков векторного и скалярного произведения).

3.$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$; $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$; $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$ (перестановка двух векторов).

4. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

5 Выражение смешанного произведения через координаты

Пусть векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ разложены по базису $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, $\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$.

Тогда, используя свойства смешанного произведения, найдем, что

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}\cdot(c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}) =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}\right)\cdot(c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

.

6 Некоторые приложения смешанного произведения

1. Определение взаимной ориентации векторов в пространстве.

Если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$, то тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - правая, если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$, то тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - левая.

2. Установление компланарности векторов.

$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \Leftrightarrow$ векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - компланарны.

Пример. Выяснить, лежат ли точки $M_1\,(2;5;3)$, $M_2\,(3;7;4)$, $M_3\,(-5;5;-1)$, $M_4\,(-4;-3;0)$ в одной плоскости?

Решение:

1. Найдем векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\overrightarrow{M_1M_4}$.

$\overrightarrow{M_1M_2} = (3-2; 7-5; 4-3) = (1;2;1)$,

$\overrightarrow{M_1M_3} = (-5-2; 5-5; -1-3) = (-7;0;-4)$,

$\overrightarrow{M_1M_4} = (-4-2; -3-5; 0-3) = (-6;-8;-3)$.

2. Вычислим смешанное произведение векторов $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\overrightarrow{M_1M_4}$.

$$\overrightarrow{M_1M_2}\overrightarrow{M_1M_3}\overrightarrow{M_1M_4} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -7 & 0 & -4 \\ -6 & -8 & -3 \end{vmatrix} = 30 \neq 0.$$

Отсюда, на основании свойства 4 смешанного произведения делаем вывод, что векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\overrightarrow{M_1M_4}$ не лежат в одной плоскости, а значит, и точки M_1, M_2, M_3, M_4 не лежат в одной плоскости.

3. Определение объемов параллелепипеда и треугольной пирамиды

Согласно геометрическому смыслу смешанного произведения векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, равен $V = \vec{a}\vec{b}\vec{c}$. А объем треугольной пирамиды, построенной на этих же вектора$V_1 = \dfrac{1}{6}V = \dfrac{1}{6}\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Пример. Найти объем пирамиды, если заданы ее вершины: $A\,(1;-1;-1)$, $B\,(0;5;4)$, $C\,(2;-3;-4)$, $D\,(5;-4;-6)$.

Решение:

1. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AB} = (-1;6;5)$, $\overrightarrow{AC} = (1;-2;-3)$, $\overrightarrow{AD} = (4;-3;-5)$.

2. Вычислим смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -1 & 6 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = -18.$$

Тогда объем параллелепипеда, построенного на трех рассматриваемых векторах, равен $V = |-18| = 18$ куб. ед., а искомый объем треугольной пирамиды $ABCD$ равен $V_1 = \dfrac{1}{6} \cdot 18 = 3$ куб. ед.

Ответ: $V_{\text{пир}} = 3$ куб.ед.