Аналитическая геометрия
Модуль 1. Матричная алгебра. Векторная алгебра
Лекция 1.4

Аннотация

Скалярные и векторные величины. Понятие геометрического вектора, как направленного отрезка. Длина вектора. Нуль-вектор, единичный вектор (орт). Угол между двумя векторами. Коллинеарные и компланарные векторы. Равенство векторов. Связанные, скользящие и свободные векторы. Линейные операции над векторами и их свойства. Ортогональная проекция вектора на направление другого вектора и ее линейные свойства. Разложение вектора по ортам координатных осей. Линейные операции над векторами в координатной форме. Модуль вектора. Направляющие косинусы. Условие коллинеарности векторов в координатной форме.

1 Векторы. Основные понятия

Определение

Величины, которые полностью определяются своим числовым значением, называются **скалярными** (площадь, длина, объем, температура, работа, масса).

Определение

Величины, которые характеризуются не только своим числовым значением, но и направлением, называются **векторными** (сила, скорость, ускорение).

Определение

Геометрический вектор – направленный прямолинейный отрезок, т.е. отрезок, который имеет длину и направление.

Обозначение: если A - начало вектора, а B - его конец, то вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$.

Виды геометрических векторов:

1. Когда заданы направление и длина, но не фиксируется точка приложения, говорят, что задан **свободный вектор** или просто **вектор**.

2. Геометрические векторы, которые можно перемещать только вдоль прямых, называют **скользящими** (вектор угловой скорости и вектор силы, действующий на абсолютно твердое тело).

3. Геометрические векторы, точка приложения которых не может изменяться, называют **связанными** (скорость в потоке жидкости или газа).

Определение

Вектор $\overrightarrow{BA}$ называется противоположным к вектору $\overrightarrow{AB}$. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается $-\vec{a}$.

Определение

Длиной или **модулем** вектора$\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB и обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Определение

Вектор, длина которого равна нулю, называется **нулевым** и обозначается $\vec{0}$.

Нулевой вектор направления не имеет.

Определение

Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным** вектором и обозначается $\vec{e}$.

Определение

Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, называется **ортом** вектора $\vec{a}$ и обозначается $\overrightarrow{a}^0$.

Очевидно, что $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \overrightarrow{a}^0$ и $\overrightarrow{a}^0 = \vec{a}/\,|\vec{a}|$.

Определение

Углом φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют угол между их направлениями.

Определение

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых: $\vec{a}||\vec{b}$.

Коллинеарные векторы могут быть **сонаправлены** (иметь одно направление) или **противоположно направлены**.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Определение

Три вектора в пространстве называются **компланарными,** если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Если среди трех векторов есть нулевой или любые два из них коллинеарны, то они компланарны.

Определение

Два вектора называются **равными** ($\vec{a} = \vec{b}$), если

1) они коллинеарны и сонаправлены;

2) имеют равные длины, т.е. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

Из определения равенства векторов следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, а начало вектора помещать в любую точку пространства.

2 Линейные операции над векторами

Под линейными операциями над векторами понимают операции сложения, вычитания и умножения вектора на число.

Сложение векторов

Определение

Пусть заданы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Возьмем точку O и построим векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{OB}$ называется **суммой векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Это правило сложения двух векторов носит название **правило треугольника.**

Можно складывать два вектора и по **правилу параллелограмма**. Для этого необходимо подвести эти векторы к одному началу и построить на них параллелограмм. Тогда суммой двух векторов будет являться вектор, расположенный на диагонали параллелограмма, выходящей из их общего начала.

Отметим, что если векторы коллинеарны, то их сумму по правилу параллелограмма определить не получится, а правило треугольника в этом случае применимо.

При сложении трех и более векторов строим векторную ломаную, каждое звено которой есть вектор, приложенный к концу предыдущего вектора. Тогда суммой векторов будет являться вектор, направленный из начала первого вектора к концу последнего.

Вычитание векторов

Определение

Под **разностью векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ понимается вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ такой, что $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Умножение вектора на скаляр.

Определение

Произведением вектора $\vec{a}$ на скаляр (число) λ называется вектор $\vec{c} = \lambda\vec{a}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) он имеет длину $|\vec{c}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$;

2) его направление совпадает с направление вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$ и противоположно вектору $\vec{a}$, если $\lambda < 0$.

Свойства линейных операций над векторами:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
3. $\lambda_1 \cdot (\lambda_2\vec{a}) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2)\vec{a}$;
4. $(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{a}$;
5. $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$;
6. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;
7. для любого вектора $\vec{a}$ существует вектор $-\vec{a}$, такой что $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

3 Проекция вектора на ось

Пусть в пространстве задана ось l, т.е. направленная прямая.

Определение

Ортогональной проекцией (или просто проекцией) точки M на ось l называется основание M_1 перпендикуляра MM_1, опущенного из точки на ось.

Точка M_1 есть точка пересечения оси l с плоскостью, проходящей через точку M перпендикулярно оси.

Замечание. Если точка M лежит на оси l, то проекция точки M на эту ось совпадает с M.

Пусть задан вектор $\overrightarrow{AB}$ и ось l. Пусть A_1 - проекция точки A, B_1 - проекция точки B на ось l.

Определение

Ортогональной проекцией (или просто проекцией) вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l называется положительное число $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, если вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ и ось l одинаково направлены и отрицательное число $-\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, если вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ и ось l противоположно направлены.

Если A_1 и B_1 совпадают, то проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ равна нулю.
Обозначение: $\text{пр}_l\overrightarrow{AB}$
Замечание. Если $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ или $\overrightarrow{AB} \perp \vec{l}$, то $\text{пр}_l\overrightarrow{AB} = 0$.

Основные свойства проекций:

1. Проекция вектора $\vec{a}$ на ось l равна произведению модуля вектора $\vec{a}$ на косинус угла φ между вектором $\vec{a}$и осью l: $\text{пр}_l\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi$.

Следствия:

1) Проекция вектора на ось положительна (отрицательна), если вектор образует с осью острый (тупой) угол, и равна нулю, если этот угол – прямой.

2) Проекции равных векторов на одну и ту же ось равны между собой.

2. Проекция суммы векторов на одну и ту же ось равна сумме их проекций на эту ось: $\text{пр}_l(\vec{a} + \vec{b}) = \text{пр}_l\vec{a} + \text{пр}_l\vec{b}$.

3. При умножении вектора $\vec{a}$ на число λ его проекция также умножается на это число: $\text{пр}_l(\alpha \cdot \vec{a}) = \alpha \cdot \text{пр}_l\vec{a}$.

Замечание. Линейные операции над векторами приводят к линейным операциям над проекциями этих векторов.

4 Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора. Направляющие косинусы

Рассмотрим в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$. Выделим на координатных осях Ox, Oy, Oz единичные векторы (орты), обозначаемые соответственно $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Рассмотрим вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$. Проведем через точку M плоскости, параллельные координатным плоскостям. Тогда $\text{пр}_x\vec{a} = \left|\overrightarrow{OM_1}\right|$, $\text{пр}_y\vec{a} = \left|\overrightarrow{OM_2}\right|$, $\text{пр}_z\vec{a} = \left|\overrightarrow{OM_3}\right|$. По определению суммы нескольких векторов находим: $\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1N} + \overrightarrow{NM}$. Следовательно, $\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$.

$\overrightarrow{OM_1} = \left|\overrightarrow{OM_1}\right| \cdot \vec{i} = a_x\vec{i}$,

$\overrightarrow{OM_2} = \left|\overrightarrow{OM_2}\right| \cdot \vec{j} = a_y\vec{j}$,

$\overrightarrow{OM_3} = \left|\overrightarrow{OM_3}\right| \cdot \vec{k} = a_z\vec{k}$.

Таким образом, получаем **разложение вектора по ортам координатных осей**:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

Определение

Числа a_x, a_y, a_z называются координатами вектора $\vec{a}$.

Обозначение: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$.

Из теоремы о диагонали прямоугольного параллелепипеда следует:

$$|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2.$$

Отсюда

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Пусть углы вектора $\vec{a}$ с осями Ox,Oy, Oz соответственно равны α, β, γ. По определению проекции вектора на ось имеем

$$a_x = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha, a_y = |\vec{a}| \cdot \cos\beta, a_z = |\vec{a}| \cdot \cos\gamma.$$

Откуда

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Определение

Числа $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называются **направляющими косинусами** вектора $\vec{a}$.

Можно доказать, что

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

то есть сумма квадратов направляющих косинусов вектора равна единице.

Итак, задав координаты вектора, всегда можно определить его модуль и направление, т.е. сам вектор.

5 Действия над векторами, заданными своими координатами

Пусть векторы $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ заданы своими координатами или $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$.

Тогда:

1. При сложении (вычитании) векторов их одноименные координаты складываются, то есть $\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z)$.

2. При умножении вектора на скаляр координаты вектора умножаются на этот скаляр, то есть $\alpha\cdot\vec{a}=(\alpha\cdot a_x, \alpha\cdot a_y, \alpha\cdot a_z)$.

3. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны тогда и только тогда, когда равны их координаты.

4. Проекции (координаты) коллинеарных векторов пропорциональны, т. е.

$$\vec{a}||\vec{b}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.$$

Пример: При каких значениях α и β векторы $\vec{a}=(-2,3,\alpha)$ и $\vec{b}=(\beta,-6,2)$ коллинеарны?

Решение: $\vec{a}||\vec{b}\Leftrightarrow\frac{-2}{\beta}=\frac{3}{-6}=\frac{\alpha}{2}$. Тогда $\alpha=-1, \beta=4$.

5. Координаты вектора равны разности соответствующих координат его конца и начала. Пусть $A\,(x_1,y_1,z_1)$, $B\,(x_2,y_2,z_2)$, тогда

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

Пример: Найти длину вектора $\vec{a}=(2;3;6)$ и его орт.

Решение: $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+3^2+6^2}=7,\ \overrightarrow{a}^0=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=(\dfrac{2}{7},\dfrac{3}{7},\dfrac{6}{7})$.