Аналитическая геометрия
Модуль 1. Матричная алгебра. Векторная алгебра
Лекция 1.3

Аннотация

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ): основные понятия, координатная, матричная и векторная формы записи. Понятие общего и частного решений СЛАУ. Критерий Кронекера – Капелли совместности СЛАУ. Решение невырожденных систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы и по формулам Крамера. Метод Гаусса решения СЛАУ, выбор базисных и свободных неизвестных. Критерий единственности решения совместной СЛАУ.

1 Системы линейных уравнений

Определение

Системой из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными (сокращенно СЛАУ) называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1}$$

где числа a_{ij} - это **коэффициенты** системы, числа b_i – **свободные члены**, $x_1, \ldots, x_n$ - **неизвестные**, которые надо определить.

Запись СЛАУ в виде (1) называется **координатной**. Эту систему можно записать в **матричной** форме

$$A \cdot x = b, \tag{2}$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матрица системы, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – столбец неизвестных, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ – столбец свободных членов.

Обозначим $a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$, ..., $a_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ - столбцы матрицы A. Тогда получим еще одну форму записи системы:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b. \tag{3}$$

Соотношение (3) называют **векторной** записью системы. Она показывает, что решение системы (1) можно трактовать, как представление столбца b в виде линейной комбинации столбцов $a_1, a_2, ..., a_n$.

Определение

Расширенной матрицей системы (1) называется матрица $\widetilde{A}$ (или $A|\,b$) вида

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Определение

Система (1) называется **однородной**, если $b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$, в противном случае она называется **неоднородной**.

Определение

Решением СЛАУ называется такой набор значений неизвестных $x_1^\circ, x_2^\circ, ..., x_n^\circ$, который при подстановке в каждое уравнение системы (1) обращает его в верное тождество.

Решить СЛАУ – значит:
1) выяснить, имеет ли СЛАУ решения;
2) найти все решения, если они существуют.

Определение

Система (1) называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение и **несовместной**, если решений не имеет.

Определение

Совместная система называется **определенной,** если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое конкретное решение называется **частным** решением системы.

Определение

Совокупность всех частных решений называется **общим** решением системы.

Замечание. Однородная СЛАУ всегда совместна, поскольку нулевой набор значений ее неизвестных всегда является решением. Это решение называется **нулевым** или **тривиальным**.

Определение

Две системы называются **равносильными** или **эквивалентными**, если они имеют одно и то же множество решений.

Эквивалентные системы получаются, в частности, с помощью элементарных преобразований над строками матрицы A.

2 Критерий совместности СЛАУ

Теорема Кронекера-Капелли (о совместности СЛАУ)

Для совместности системы (1) необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы A был равен рангу ее расширенной матрицы $\widetilde{A}$.

Для совместных СЛАУ верны следующие *утверждения*:

1. Если ранг совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

2. Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений.

Определение

Пусть ранг матрицы совместной системы r меньше числа неизвестных n. Тогда переменные $x_1, x_2, ..., x_r$ называют **основными** (или **базисными**), если определитель матрицы, составленный из коэффициентов при них (базисный минор) отличен от нуля. Остальные $n - r$ переменных называются **неосновными** (или **свободными**).

3 Матричный метод решения СЛАУ

Рассмотрим систему из n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{4}$$

или в матричной форме

$$Ax = b. \tag{5}$$

Здесь матрица A системы является квадратной.

Определение

Определитель матрицы системы $\Delta = \det A$ называется **определителем системы** (4).

Определение

Если определитель системы (4) отличен от нуля, то система называется **невырожденной**.

Теорема (о существовании решения)

Система (4) имеет решение и притом единственное, если определитель матрицы системы $\Delta \neq 0$.

Пусть $\Delta \neq 0$ и, следовательно, матрица A невырожденная, а значит существует обратная матрица A^{-1}. Умножив обе части уравнения (5) слева на матрицу A^{-1}, получим:

$$x = A^{-1} \cdot b. \tag{6}$$

Отыскание решения системы (4) по формуле (6) называется **матричным методом решения системы**.

Пример. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ \qquad -2x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

Решение.

Данную систему можно представить в виде: $Ax = b$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

1) Найдем обратную матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} = -\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & -7 \\ -2 & 1 & 7 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/7 & 4/7 & 1 \\ 2/7 & -1/7 & -1 \\ 4/7 & -2/7 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) Решение системы определим по формуле (6):

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/7 & 4/7 & 1 \\ 2/7 & -1/7 & -1 \\ 4/7 & -2/7 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Решение системы: $x_1 = 6, x_2 = -5, x_3 = -3$.

4 Метод Крамера

Рассмотрим СЛАУ вида (4). Запишем равенство (6) в развернутом виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\det A} \cdot (A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + ... + A_{n1}b_n) \\ x_2 &= \frac{1}{\det A} \cdot (A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + ... + A_{n2}b_n) \\ x_n &= \frac{1}{\det A} \cdot (A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + ... + A_{nn}b_n) \end{aligned} \tag{7}$$

Можно заметить, что суммы, представленные в скобках равенств (7) есть разложения определителей, полученных из определителя матрицы A заменой соответствующих столбцов с номерами 1, 2, $\dots$, n столбцом свободных членов b. Тогда получим формулы для вычисления решений системы (4):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, ..., x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \tag{8}$$

где

$$\Delta = \det A,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_n & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & ... & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & b_n & ... & a_{nn} \end{vmatrix}, ..., \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & b_2 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & b_n \end{vmatrix}.$$

Формулы (8) называются **формулами Крамера**, а метод решения невырожденных систем по формулам (8) – **методом Крамера**.

Пример. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

Решение.

1) Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то данная система является невырожденной и можно найти ее решение по формулам (8).

2) Найдем определители Δ_1, Δ_2 и Δ_3, заменяя в определителе Δ первый, второй и третий столбцы соответственно столбцом свободных членов B:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = -8, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

3) Найдем решение системы по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{-8}{-4} = 2, x_2 = \frac{4}{-4} = -1, x_3 = \frac{-4}{-4} = 1.$$

5 Метод Гаусса

Пусть задана система m линейных уравнений с n неизвестными вида (1).

Решение системы (1) методом Гаусса заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого вида (*прямой ход*)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\quad a_{rr}x_r + \ldots + a_{rn}x_n = b_r, \end{cases} \tag{9}$$

из которой последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные (*обратный ход*).

Алгоритм решения СЛАУ методом Гаусса:

1. Записать расширенную матрицу $\widetilde{A}$, отвечающую системе уравнений (1).

2. Элементарными преобразованиями привести расширенную матрицу $\widetilde{A}$ к ступенчатому виду (прямой ход метода Гаусса).

3. Провести исследование совместности СЛАУ, используя теорему Кронекера-Капелли:

а) если $rangA = rang\widetilde{A} = n$, где n – число неизвестных, то СЛАУ совместна и определена (имеет единственное решение);

б) еcди $rangA = rang\widetilde{A} \neq n$, где n – число неизвестных, то СЛАУ совместна и не определена (имеет бесконечное множество решений);

в) если $rangA \neq rang\widetilde{A}$, то СЛАУ не совместна.

4. Записать ступенчатую СЛАУ (обратный ход метода Гаусса).

а) $rangA = rang\widetilde{A} = n$. Последовательно найти $x_n, x_{n-1}, ..., x_1$.

б) Случай $rangA = rang\widetilde{A} \neq n$. В качестве базисных переменных выберем неизвестные с которых начинаются уравнения ступенчатой системы. Остальные переменные – свободные. Выразим базисные переменные через свободные, получая тем самым общее решение СЛАУ.

в) Случай $rangA \neq rang\widetilde{A}$. СЛАУ решений не имеет.

Пример. Найти общее и одно частное решения системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 10x_4 = -4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 14. \end{cases}$$

Решение.

1) Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 10 \\ 2 & -1 & 5 & 10 & -4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 5 & 5 & 14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 10 \\ 0 & 3 & 3 & 12 & -24 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & 8 & -16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

2) $r(A) = r(\widetilde{A}) = 2$, количество неизвестных $n = 4$. Вывод: система совместна и имеет бесконечно много решений.

3) Выпишем систему уравнений, соответствующую полученной ступенчатой матрице:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 10, \\ \qquad x_2 + x_3 + 4x_4 = -8. \end{cases}$$

Так как $r(A) = 2$, то базисных неизвестных будет две. В качестве базисных неизвестных можно выбрать x_1, x_2, поскольку минор $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ состоит из коэффициентов при этих переменных.

Тогда неизвестные x_3, x_4 будут свободными. Перенесем слагаемые, содержащие свободные неизвестные, в правую часть уравнений, получим систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 10 - x_3 + x_4, \\ \mathrm{x}_2 = -8 - x_3 - 4x_4. \end{cases}$$

4) Методом обратного хода найдем выражения базисных неизвестных через свободные. Пусть переменные $x_3 = C_1, x_4 = C_2$, C_1, C_2 - произвольные постоянные. Тогда

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 10 - x_3 + x_4, \\ x_2 = -8 - x_3 - 4x_4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6 + x_3 - 7x_4, \\ x_2 = -8 - x_3 - 4x_4. \end{cases}$$

Общее решение системы:

$$\begin{cases} x_1 = 6 + C_1 - 7C_2, \\ x_2 = -8 - C_1 - 4C_2, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$$

5) Придавая постоянным C_1, C_2 произвольные значения, получим частные решения. Пусть $C_1 = 0, C_2 = 1$, тогда получим частное решение

$$\begin{cases} x_1 = -13, \\ x_2 = -12, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 1. \end{cases}$$