Аналитическая геометрия
Модуль 1. Матричная алгебра. Векторная алгебра
Лекция 1.2

Аннотация

Вырожденные и невырожденные матрицы. Приведение квадратной невырожденной матрицы к единичной с помощью элементарных преобразований строк. Обратная матрица, ее единственность, критерий ее существования. Присоединенная матрица. Вычисление обратной матрицы с помощью присоединенной матрицы. Обращение произведения двух квадратных невырожденных матриц. Решение матричных уравнений $AX{=}C$, $XB{=}C$, $AXB{=}C$ с невырожденными матрицами A и B.

1 Обратная матрица и ее свойства

Пусть A – квадратная матрица n-го порядка

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение

Квадратная матрица A называется **невырожденной** или**неособой**, если ее определитель неравен нулю. В противном случае, когда определитель матрицы A равен нулю, ее называют **вырожденной**.

$$\textit{Пример. } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Так как $|A| = 8$, то матрица A является невырожденной. Так как $|B| = 0$, то матрица B – вырожденная.

Определение

Матрицей, **союзной** или **присоединенной** к матрице A, называется матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix},$$

состоящая из алгебраических дополнений A_{ij} к элементам a_{ij} матрицы A.

Определение

Матрица A^{-1} называется **обратной** матрице A, если выполнено условие $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A.

Из определения следует, что только квадратная матрица имеет обратную. В этом случае и обратная матрица является квадратной того же порядка

Теорема (необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы)

Обратная матрица A^{-1} существует (и единственна) тогда и только тогда, когда исходная матрица A является невырожденной.

Матрица A^{-1} имеет вид $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot A^*$.

Пример. Определить, при каких λ существует матрица, обратная данной.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Свойства обратной матрицы:
1) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$;
2) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;
3) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;
4) $\left(A^{-1}\right)^{T} = \left(A^{T}\right)^{-1}$.

2 Вычисление обратной матрицы

1 способ: Вычисление обратной матрицы с помощью присоединенной.

Чтобы найти обратную матрицу, нужно:

1) Вычислить определитель данной матрицы. Если он отличен от нуля, то обратная матрица существует.

2) Вычислить алгебраические дополнения всех элементов исходной матрицы и составить присоединенную.

3) Вычислить обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot A^{*}$.

4) Сделать проверку: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Пример. Найти A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение.

1) Находим определитель матрицы A: $|A| = 2$.

2) Составим союзную матрицу A^{*}, вычислив алгебраические дополнения матрицы A:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -4$; $A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 12$;

$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$;

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -10$; $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 28$;

$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 4$;

$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4$; $A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 11$;

$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2.$

$A^* = \begin{pmatrix} -4 & 12 & 2 \\ -10 & 28 & 4 \\ -4 & 11 & 2 \end{pmatrix}.$

3) Находим A^{-1}: $A^{-1} = \dfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 12 & 2 \\ -10 & 28 & 4 \\ -4 & 11 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 1 \\ -5 & 14 & 2 \\ -2 & 5,5 & 1 \end{pmatrix}.$

4) Проверка:

$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 1 \\ -5 & 14 & 2 \\ -2 & 5,5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E;$

$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 6 & 1 \\ -5 & 14 & 2 \\ -2 & 5,5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 1 \\ -5 & 14 & 2 \\ -2 & 5,5 & 1 \end{pmatrix}.$

2 способ: Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.

Чтобы найти обратную матрицу к матрице A, нужно:

1) Составить матрицу $D = (A|E)$, приписав к исходной матрице A справа единичную E того же порядка.

2) Элементарными преобразованиями строк преобразовать матрицу D так, чтобы обратить ее левую половину в единичную матрицу, тогда правая половина превратиться в обратную A^{-1}.

3) Сделать проверку: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Пример. Найти A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение.

1) Составим матрицу $D = (A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

2) Произведем элементарные преобразования над строками матрицы D.

a) Элементы первой строки матрицы D умножим на (-1) и сложим с элементами второй, а затем и третьей строк:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right);$$

b) элементы второй строки умножим на (-1) и сложим с элементами третьей строки:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right);$$

c) элементы третьей строки умножим на (-2) и сложим с элементами второй строки:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) = \left(E|A^{-1}\right).$$

3) Проверка:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E;$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3 Понятие о матричном уравнении

Определение

Рассмотрим два вида **матричных уравнений** относительно неизвестной матрицы X: $A \cdot X = B$ и $X \cdot A = B$, где A и B – известные матрицы, причем матрица A квадратная и невырожденная. Некоторую матрицу называют **решение матричного уравнения** относительно неизвестной матрицы X, если при ее подстановке вместо X матричное уравнение обращается в тождество.

Пример. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение.

Введем следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

тогда уравнение принимает вид: $A \cdot X = B$. Умножим обе части этого уравнения слева на A^{-1}, предполагая, что матрица A^{-1} известна, т.е. $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Отсюда получим его решение в матричном виде: $X = A^{-1} \cdot B$.

Найдем обратную матрицу $A^{-1} = \dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Тогда $X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -9 & -3 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 8 & -9 & -3 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Матричное уравнение $X \cdot A = B$ можно решить аналогично, множив обе его части справа на A^{-1} (предполагая, что обратная матрица A^{-1} известна), т.е. $X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$. Решение этого уравнения в матричном виде имеет вид: $X = B \cdot A^{-1}$.