Аналитическая геометрия
Модуль 1. Матричная алгебра. Векторная алгебра
Лекция 1.1

Аннотация

Матрицы. Специальные виды матриц. Линейные операции над матрицами. Транспонирование матрицы. Алгебраические свойства линейных операций и транспонирования. Умножение матриц. Алгебраические свойства умножения. Элементарные преобразования матриц. Эквивалентные матрицы. Приведение матрицы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк.

1 Определение матрицы. Виды матриц

Определение

Числовой матрицей размера $m \times n$ (произносится «эм на эн») называется совокупность чисел, расположенных в виде таблицы, в которой имеется m строк и n столбцов. Составляющие матрицу числа называются ее **элементами**.

Матрица записывается одним из следующих способов:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}, \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Здесь a_{ij} - элемент матрицы, находящийся в строке под номером i и в столбце под номером j, где $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, т.е. $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$.

Используют и другие сокращенные обозначения: (a_{ij}), $[a_{ij}]$, $\|a_{ij}\|$.

Пример. Элемент a_{32} расположен в третьей строке и втором столбце.

Матрицу как единый объект обозначают прописными латинскими буквами $A, B, C, ...$, иногда снизу подписывая их размерность, например, $A_{m\times n}$.

Пример. $A_{2\times 4} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ - матрица A имеет размер 2×4, т.к. она содержит 2 строчки и 4 столбца.

Рассмотрим некоторые виды матриц.

Определение

Матрица размера $1 \times n$, т.е. состоящая из одной строки, называется **матрицей-строкой** или **строчной матрицей**. Она имеет вид

$$A = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}) .$$

Число элементов в матрице-строке есть ее **длина**.

Определение

Матрица размера $m \times 1$, т.е. состоящая из одного столбца, называется **матрицей-столбцом** или **стролбцевой матрицей.** Она имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ ..... \\ a_{1n} \end{pmatrix} .$$

Число элементов в матрице-столбце есть ее **высота**.

По размерности все матрицы делятся на **квадратные** $(m = n)$ и **прямоугольные** $(m \neq n)$.

Пример. Матрица $A_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$ - прямоугольная матрица-столбец размера 3×1, а матрица $B_{3\times3} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ - квадратная матрица размера 3×3.

Определение

Число строк и столбцов квадратной матрицы называется ее **порядком**.

Пример. Матрица $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица n-го (произносится «энного») порядка, а матрица $B_{3\times3} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ - матрица третьего порядка.

Определение

В квадратной матрице элементы $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ образуют **главную диагональ**, а элементы $a_{1n}, a_{2,n-1}, ..., a_{n1}$ - **побочную**.

Определение

Квадратная матрица порядка n, у которой все элементы, не стоящие на главной диагонали, равны нулю, называется **диагональной**:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

.

Определение

Единичной матрицей называется диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице. Единичную матрицу обычно обозначают латинской буквой E:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

.

Определение

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой** и обозначается латинской буквой O.

Определение

Квадратная матрица, все элементы которой расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю, называется **треугольной**. Причем, матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется **верхней треугольной**, а матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- нижней треугольной.

Определение

Прямоугольная матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{mn} \end{pmatrix},$$

у которой элементы, расположенные под главной диагональю, равны нулю, называется **верхней трапециевидной**.

Важную роль играют **ступенчатые матрицы** или **матрицы ступенчатого вида**.

Определение

Матрица называется **ступенчатой**, если для любой ее строки выполнено следующее условие: под первым слева ненулевым элементом строки и предшествующими ему нулевыми элементами этой строки все элементы матрицы равны нулю.

Например,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 9 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 Линейные операции над матрицами

1. Сравнение матриц

Определение

Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называются **равными**, если они имеют одинаковые размерности и элементы этих матриц, стоящие на одних и тех же местах совпадают, т.е. соответствующие элементы $(a_{ij}) = (b_{ij})$.

2. Сложение и вычитание матриц

Операция сложения вводится только для матриц одинаковой размерности.

Определение

Суммой двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называется такая матрица $C = (c_{ij})$, что каждый ее элемент есть сумма соответствующих элементов матриц A и B, т.е. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Определение

Разностью двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называется такая матрица $C = (c_{ij})$, что $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Пример . Пусть даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Тогда

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+7 & 0+2 & 8+(-3) \\ 4+(-4) & -4+3 & 1+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix},$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2-7 & 0-2 & 8-(-3) \\ 4-(-4) & -4-3 & 1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 11 \\ 8 & -7 & -4 \end{pmatrix}.$$

3. Умножение матрицы на число

Определение

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ **на число** $\alpha \neq 0$ называется такая матрица $B = (b_{ij})$, что каждый ее элемент есть произведение соответствующих элементов матрицы A на число α, т.е. $b_{ij} = \alpha a_{ij}$.

Пример. Произведением матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & \sqrt{2} & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

на число $\alpha = 4$ будет матрица

$$B = 4 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 & 3 \cdot 4 & -2 \cdot 4 \\ 0 \cdot 4 & \sqrt{2} \cdot 4 & 4 \cdot 4 \\ 2 \cdot 4 & 1 \cdot 4 & 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 & -8 \\ 0 & 4\sqrt{2} & 16 \\ 8 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

.

Определение

Матрица $-A = -1 \cdot A$ называется **противоположной** матрице A.

Замечание. Разность матриц A и B можно рассматривать, как сумму матрицы A и матрицы, противоположной к матрице B, т.е. $A - B = A + (-B)$.

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают следующими *свойствами*:

1. $A + B = B + A$;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. $A + O = A$;
4. $A - A = O$;
5. $1 \cdot A = A$;
6. $\alpha\,(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
7. $(\alpha + \beta)\,A = \alpha A + \beta A$;
8. $\alpha\,(\beta A) = (\alpha\beta)\,A$.

3 Нелинейные операции над матрицами

1. Произведение матриц

Определение

Матрица A называется **согласованной** с матрицей B, если число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B.

Пример. Из трех матриц

$$A_{2\times 4} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -1 & 4 \\ 5 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \; C_{4\times 2} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

согласованными являются: A с C, B с A, C с B, C с A. Матрица A не согласована с B, матрица B не согласована с матрицей C.

Операция умножения двух матриц имеет место только для случая согласованных матриц. В частности, операция умножения матриц всегда выполнима, если оба множителя являются квадратными матрицами.

Определение

Произведением матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ **на матрицу** $B_{n\times k} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times k} = (c_{ij}) = A \cdot B$, каждый элемент которой равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-ого столбца матрицы B, т.е.

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rj} \; (i = \overline{1,m}; \; j = \overline{1,k}).$$

Получение элемента c_{ij} схематически изображается так:

$$i\begin{pmatrix}\cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix}\cdot\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\vdots\\ \vdots\\ \vdots\end{pmatrix}\\ j\end{array} = i\begin{array}{c}\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \otimes & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}\\ j\end{array}$$

Пример. Найти $A\cdot B$ и $B\cdot A$ (если они существуют):

а) $A=\begin{pmatrix}1&3\\1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&1&0\end{pmatrix}$

Матрицы $A_{2\times 2}$ и $B_{2\times 3}$ являются согласованными. В результате умножения A на B получится матрица размера 2×3:

$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&3\\1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&1\\3&1&0\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}1\cdot1+3\cdot3 & 1\cdot2+3\cdot1 & 1\cdot1+3\cdot0\\ 1\cdot1+2\cdot3 & 1\cdot2+2\cdot1 & 1\cdot1+2\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&5&1\\7&4&1\end{pmatrix}.$

Матрицы $B_{2\times 3}$ и $A_{2\times 2}$ не являются согласованными, поэтому произведение $B\cdot A$ не существует.

б) $A=\begin{pmatrix}-4&0\\2&1\\-1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&0&-1\\2&-4&6\end{pmatrix}$.

В результате умножения A на B получится матрица размера 3×3.

$A\cdot B=\begin{pmatrix}-4&0\\2&1\\-1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&0&-1\\2&-4&6\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}-4\cdot3+0\cdot2 & -4\cdot0+0\cdot(-4) & -4\cdot(-1)+0\cdot6\\ 2\cdot3+1\cdot2 & 2\cdot0+1\cdot(-4) & 2\cdot(-1)+1\cdot6\\ -1\cdot3+3\cdot2 & -1\cdot0+3\cdot(-4) & -1\cdot(-1)+3\cdot6\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}-12&0&4\\8&-4&4\\3&-12&19\end{pmatrix}.$

В результате умножения B на A получится матрица размера 2×2.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot (-4) + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 \\ 2 \cdot (-4) + (-4) \cdot 2 + 6 \cdot (-1) & 2 \cdot 0 + (-4) \cdot 1 + 6 \cdot 3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -11 & -3 \\ -22 & 14 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что, вообще говоря, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Пусть, например, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, тогда

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -2 \end{pmatrix},$$
$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Определение

Матрицы A и B называются **перестановочными** или **коммутирующими**, если $A \cdot B = B \cdot A$.

Операция умножения матриц обладает следующими *свойствами*:
1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
2. $A \cdot (B + C) = AB + AC$;
3. $(A + B) \cdot C = AC + BC$;
4. $(\alpha A) \cdot B = \alpha (A \cdot B)$;
5. $A \cdot E = E \cdot A = A$, где A и E – квадратные матрицы n-го порядка.

Замечание. Операции деления матриц не существует.

2. Возведение матрицы в степень

Операция возведения в степень определяется только для квадратных матриц.

Определение

Пусть $n \in N$. Тогда **n-ой степенью матрицы** A называется матрица A^n, равная $A^n = A \cdot A \cdot ... \cdot A$ (n раз).

Введем также нулевую степень квадратной матрицы, полагая $A^0 = E$, где E – единичная матрица того же порядка.

Пример. Пусть дана квадратная матрица второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

тогда

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \cdot 4 + (-1) \cdot (-2) & 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 \\ -2 \cdot 4 + 1 \cdot (-2) & -2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -5 \\ -10 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Транспонирование

Определение

Матрица, полученная из данной матрицы A заменой каждой ее строки столбцом с соответствующим номером, называется **транспонированной** к A и обозначается A^T.

Пример. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ транспонированной будет $A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, а для $B = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$ - $B^T = \begin{pmatrix} -7 & 2 \end{pmatrix}$.

Определение

Операция нахождения транспонированной матрицы называется **транспонированием матрицы.**

Операция транспонирования матрицы обладает следующими свойствами:

1. $\left(A^T\right)^T = A$;
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$;
3. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$;
4. $(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$.

Замечание. При транспонировании квадратной матрицы все элементы главной диагонали остаются на своих местах, а остальные симметрично отражаются относительно главной диагонали.

Определение

Квадратная матрица A называется **симметрической**, если она не изменяется в результате транспонирования, т.е. $A^T = A$.

Например, матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Приведение матрицы к ступенчатому виду

Далее будем называть строки или столбцы матрицы ее рядами.

Определение

Следующие преобразования матриц будем называть **элементарными**:

1) перестановка местами двух параллельных рядов матрицы;

2) умножение всех элементов ряда на число, отличное от нуля;

3) прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

Определение

Две матрицы A и B называются **эквивалентными**, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований.

Эквивалентность двух матриц обозначают: $A \sim B$.

С помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к ступенчатому виду.

Пример. Привести матрицу к ступенчатому виду матрицу
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$