Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 1. Элементарные функции и пределы числовых последовательностей

Лекция 1.1

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Логические символы

Логические символы

1. $\forall$ - любой, для любого

Логические символы

1. $\forall$ - любой, для любого

$\forall x > 0$

Логические символы

1. $\forall$ - любой, для любого

$\forall x > 0$ - любое число x, большее нуля

Логические символы

1. $\forall$ - любой, для любого

$\forall x > 0$ - любое число x, большее нуля

2. $\exists$ - существует

Логические символы

1. $\forall$ - любой, для любого

$\forall x > 0$ - любое число x, большее нуля

2. $\exists$ - существует

$\exists x > 1$

Логические символы

1. $\forall$ - любой, для любого

$\forall x > 0$ - любое число x, большее нуля

2. $\exists$ - существует

$\exists x > 1$ - существует число x, большее одного

Логические символы

1. $\forall$ - любой, для любого

$\forall x > 0$ - любое число x, большее нуля

2. $\exists$ - существует

$\exists x > 1$ - существует число x, большее одного

3. $\Rightarrow$ - следует, следовательно

Логические символы

1. $\forall$ - любой, для любого

$\forall x > 0$ - любое число x, большее нуля

2. $\exists$ - существует

$\exists x > 1$ - существует число x, большее одного

3. $\Rightarrow$ - следует, следовательно

$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$

Логические символы

1. $\forall$ - любой, для любого

$\forall x > 0$ - любое число x, большее нуля

2. $\exists$ - существует

$\exists x > 1$ - существует число x, большее одного

3. $\Rightarrow$ - следует, следовательно

$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$

4. $\Leftrightarrow$ - равносильно, эквивалентно

Логические символы

1. $\forall$ - любой, для любого

$\forall x > 0$ - любое число x, большее нуля

2. $\exists$ - существует

$\exists x > 1$ - существует число x, большее одного

3. $\Rightarrow$ - следует, следовательно

$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$

4. $\Leftrightarrow$ - равносильно, эквивалентно

$x + 3 < 0 \Leftrightarrow x < -3$

Логические символы

5. $\in$ - принадлежит

Логические символы

5. $\in$ - принадлежит

$x \in A$

Логические символы

5. $\in$ - принадлежит

$x \in A$ - число x принадлежит множеству A

Логические символы

5. $\in$ - принадлежит

$x \in A$ - число x принадлежит множеству A

$1 \in \{1, 2, 3\}$

Логические символы

5. $\in$ - принадлежит

$x \in A$ - число x принадлежит множеству A

$1 \in \{1, 2, 3\}$

6. $\subset$ - включено

Логические символы

5. $\in$ - принадлежит

$x \in A$ - число x принадлежит множеству A

$1 \in \{1, 2, 3\}$

6. $\subset$ - включено

$A \subset B$

5. $\in$ - принадлежит

$x \in A$ - число x принадлежит множеству A

$1 \in \{1, 2, 3\}$

6. $\subset$ - включено

$A \subset B$ - множество A включено в множество B, т.е. все элементы множества A являются также и элементами множества B

Логические символы

5. $\in$ - принадлежит

$x \in A$ - число x принадлежит множеству A

$1 \in \{1, 2, 3\}$

6. $\subset$ - включено

$A \subset B$ - множество A включено в множество B, т.е. все элементы множества A являются также и элементами множества B

$\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$

Множества чисел

Множества чисел

$$N = \{1, 2, ...\}$$

Множества чисел

$N = \{1, 2, ...\}$ - множество натуральных чисел

Множества чисел

$N = \{1, 2, ...\}$ - множество натуральных чисел
$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$

Множества чисел

$N = \{1, 2, ...\}$ - множество натуральных чисел

$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ - множество целых чисел

Множества чисел

$N = \{1, 2, ...\}$ - множество натуральных чисел

$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ - множество целых чисел

Q - множество рациональных чисел.

Множества чисел

$N = \{1, 2, ...\}$ - множество натуральных чисел

$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ - множество целых чисел

Q - множество рациональных чисел.

Рациональное число - это число, которое можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m и n - целые числа. Пример: $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}$

Множества чисел

I - множество иррациональных чисел.

I - множество иррациональных чисел.
Иррациональное число - это число, которое не является рациональным. Пример: $\sqrt{2}$

Множества чисел

I - множество иррациональных чисел.
Иррациональное число - это число, которое не является рациональным. Пример: $\sqrt{2}$
R - множество действительных чисел

Множества чисел

I - множество иррациональных чисел.
Иррациональное число - это число, которое не является рациональным. Пример: $\sqrt{2}$
R - множество действительных чисел - это множество всех рациональных и иррациональных чисел

Прямая и обратная теоремы

Определение

Математические утверждения, в правильности которых убеждаются путем рассуждений или доказательств, называются **теоремами**.

Прямая и обратная теоремы

Каждая теорема состоит из двух частей: из условия и заключения.

Прямая и обратная теоремы

Каждая теорема состоит из двух частей: из условия и заключения. Условие — это то, что дано;

Прямая и обратная теоремы

Каждая теорема состоит из двух частей: из условия и заключения. Условие — это то, что дано; заключение — это то, что надо доказать.

Прямая и обратная теоремы

Если в теореме условие сделать заключением, а заключение - условием,

Прямая и обратная теоремы

Если в теореме условие сделать заключением, а заключение - условием, то исходная теорема будет называться **прямой**,

Прямая и обратная теоремы

Если в теореме условие сделать заключением, а заключение - условием, то исходная теорема будет называться **прямой**, получившаяся - **обратной**,

Прямая и обратная теоремы

Если в теореме условие сделать заключением, а заключение - условием, то исходная теорема будет называться **прямой**, получившаяся - **обратной**, а обе теоремы вместе - **взаимно обратными**.

Прямая и обратная теоремы

Пусть X и Y - некоторые утверждения.

Прямая и обратная теоремы

Пусть X и Y - некоторые утверждения. Тогда

Прямая и обратная теоремы

Пусть X и Y - некоторые утверждения. Тогда $X \Rightarrow Y$ - прямая теорема,

Прямая и обратная теоремы

Пусть X и Y - некоторые утверждения. Тогда
$X \Rightarrow Y$ - прямая теорема,
$Y \Rightarrow X$ - обратная теорема.

Необходимое и достаточное условия

Определение

Необходимым условием называется условие, без соблюдения которого данное утверждение не может быть истинным.

Необходимое и достаточное условия

Определение

Достаточным условием называется такое условие, при выполнении которого данное утверждение является истинным.

Необходимое и достаточное условия

Пусть дано математическое выражение
$X \Rightarrow Y$.

Необходимое и достаточное условия

Пусть дано математическое выражение $X \Rightarrow Y$. Тогда Y является необходимым условием для X,

Необходимое и достаточное условия

Пусть дано математическое выражение $X \Rightarrow Y$. Тогда Y является необходимым условием для X, а X является достаточным условием для Y.

Необходимое и достаточное условия

Пример:

Необходимое и достаточное условия

Пример: $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$.

Необходимое и достаточное условия

Пример: $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$.
Здесь выполнение условия $x = 2$ является достаточным для истинности равенства $x^2 = 4$,

Необходимое и достаточное условия

Пример: $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$.

Здесь выполнение условия $x = 2$ является достаточным для истинности равенства $x^2 = 4$, а выполнение условия $x^2 = 4$ является лишь необходимым для справедливости равенства $x = 2$.

Расширенное множество действительных чисел

Определение

Дополним множество действительных чисел R двумя элементами $+\infty$ и $-\infty$.

Определение

Дополним множество действительных чисел R двумя элементами $+\infty$ и $-\infty$.Полученное множество называется **расширенным множеством действительных чисел** и обозначается $\overline{R}$.

Расширенное множество действительных чисел

Определение

Дополним множество действительных чисел R двумя элементами $+\infty$ и $-\infty$.Полученное множество называется **расширенным множеством действительных чисел** и обозначается $\overline{R}$.

$a \in \overline{R} \rightarrow a$ - конечное число, $+\infty$ или $-\infty$.

Определение

Элементы $+\infty$ и $-\infty$ называются **бесконечными числами**.

Свойства бесконечных чисел

Свойства бесконечных чисел

1) $-\infty < +\infty$

Расширенное множество действительных чисел

Свойства бесконечных чисел

1) $-\infty < +\infty$

2) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

Расширенное множество действительных чисел

Свойства бесконечных чисел

1) $-\infty < +\infty$

2) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

3) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

Свойства бесконечных чисел

1) $-\infty < +\infty$

2) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

3) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

4) $(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$

Расширенное множество действительных чисел

Свойства бесконечных чисел

1) $-\infty < +\infty$

2) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

3) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

4) $(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$

5) $(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$

Расширенное множество действительных чисел

Для конечного числа a справедливы свойства

Расширенное множество действительных чисел

Для конечного числа a справедливы свойства

1) $-\infty < a < +\infty$

Расширенное множество действительных чисел

Для конечного числа a справедливы свойства

1) $-\infty < a < +\infty$

2) $a + (+\infty) = +\infty$

Для конечного числа a справедливы свойства

1) $-\infty < a < +\infty$

2) $a + (+\infty) = +\infty$

3) $a + (-\infty) = -\infty$

Для конечного числа a справедливы свойства

1) $-\infty < a < +\infty$

2) $a + (+\infty) = +\infty$

3) $a + (-\infty) = -\infty$

4) если $a > 0$, то

$a \cdot (+\infty) = +\infty$, $a \cdot (-\infty) = -\infty$

Расширенное множество действительных чисел

Для конечного числа a справедливы свойства

1) $-\infty < a < +\infty$

2) $a + (+\infty) = +\infty$

3) $a + (-\infty) = -\infty$

4) если $a > 0$, то

$a \cdot (+\infty) = +\infty$, $a \cdot (-\infty) = -\infty$

5) если $a < 0$, то

$a \cdot (+\infty) = -\infty$, $a \cdot (-\infty) = +\infty$

Расширенное множество действительных чисел

Выражения $(+\infty)+(-\infty)$, $(+\infty)-(+\infty)$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $(\pm\infty)^0$, $(\pm\infty)\cdot 0$ неопределены и называются **неопределенностями**.

Расширенное множество действительных чисел

Выражения $(+\infty) + (-\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $(\pm\infty)^0$, $(\pm\infty) \cdot 0$ неопределены и называются **неопределенностями**.

Если знак бесконечного числа неизвестен, то это число называется **бесконечностью без знака** и обозначается ∞.

Промежутки

Промежутки

1) Отрезок

1) Отрезок

$[a, b]$

Промежутки

1) Отрезок

$$[a, b] = \{x | a \le x \le b\}$$

Промежутки

1) Отрезок

$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$ - множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \leq x \leq b$

Промежутки

1) Отрезок
$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$ - множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \leq x \leq b$
2) Интервал

Промежутки

1) Отрезок

$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$ - множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \leq x \leq b$

2) Интервал

(a, b)

Промежутки

1) Отрезок

$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$ - множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \leq x \leq b$

2) Интервал

$(a, b) = \{x | a < x < b\}$

Промежутки

1) Отрезок

$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$ - множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \leq x \leq b$

2) Интервал

$(a, b) = \{x | a < x < b\}$

3) Полуинтервал

Промежутки

1) Отрезок

$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$ - множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \leq x \leq b$

2) Интервал

$(a, b) = \{x | a < x < b\}$

3) Полуинтервал

$[a, b)$

Промежутки

1) Отрезок
$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$ - множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \leq x \leq b$
2) Интервал
$(a, b) = \{x | a < x < b\}$
3) Полуинтервал
$[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$

Промежутки

1) Отрезок

$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$ - множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \leq x \leq b$

2) Интервал

$(a, b) = \{x | a < x < b\}$

3) Полуинтервал

$[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$

$(a, b]$

Промежутки

1) Отрезок
$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$ - множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \leq x \leq b$
2) Интервал
$(a, b) = \{x | a < x < b\}$
3) Полуинтервал
$[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$
$(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$

Свойства числовых множеств

Свойства числовых множеств

Промежутки - частный случай числового множества, т.е. множества, содержащего некоторый набор чисел.

Свойства числовых множеств

Промежутки - частный случай числового множества, т.е. множества, содержащего некоторый набор чисел.

Примеры:

Промежутки - частный случай числового множества, т.е. множества, содержащего некоторый набор чисел.

Примеры:

$[1, 3]$ - отрезок,

Свойства числовых множеств

Промежутки - частный случай числового множества, т.е. множества, содержащего некоторый набор чисел.

Примеры:

$[1,3]$ - отрезок,

$(1,4)$ - интервал,

Свойства числовых множеств

Промежутки - частный случай числового множества, т.е. множества, содержащего некоторый набор чисел.

Примеры:

$[1,3]$ - отрезок,

$(1,4)$ - интервал,

$\{1,3,5\}$ - числовое множество с элементами 1, 3, 5.

Свойства числовых множеств

Определение

Числовое множество E называется **ограниченным сверху (снизу)**, если

$$\exists b \in R \quad \forall x \in E\colon x \le b \; (x \ge b).$$

Расшифровка математических символов:

Свойства числовых множеств

Расшифровка математических символов:
$\exists b \in R$ - существует такое действительное число b, что

Свойства числовых множеств

Расшифровка математических символов:
$\exists b \in R$ - существует такое действительное число b, что
$\forall x \in E$ - для любого числа x из множества E

Расшифровка математических символов:
$\exists b \in R$ - существует такое действительное число b, что
$\forall x \in E$ - для любого числа x из множества E
: - выполняется

Свойства числовых множеств

Расшифровка математических символов:

$\exists b \in R$ - существует такое действительное число b, что

$\forall x \in E$ - для любого числа x из множества E

: - выполняется

$x \leq b$ - x меньше или равен b

Свойства числовых множеств

Расшифровка математических символов:

$\exists b \in R$ - существует такое действительное число b, что

$\forall x \in E$ - для любого числа x из множества E

: - выполняется

$x \leq b$ - x меньше или равен b

$x \geq b$ - x больше или равен b

Свойства числовых множеств

Определение

Числовое множество E называется **неограниченным сверху (снизу)**, если

$$\forall b \in R \quad \exists x \in E\colon x > b \ (x < b)$$

Свойства числовых множеств

Расшифровка математических символов:

Расшифровка математических символов:

$\forall b \in R$ - для любого действительного числа b

Расшифровка математических символов:
$\forall b \in R$ - для любого действительного числа b
$\exists x \in E$ - существуе такое число x из множества E, что

Свойства числовых множеств

Расшифровка математических символов:

$\forall b \in R$ - для любого действительного числа b

$\exists x \in E$ - существуе такое число x из множества E, что

: - выполняется

Свойства числовых множеств

Расшифровка математических символов:

$\forall b \in R$ - для любого действительного числа b

$\exists x \in E$ - существуе такое число x из множества E, что

: - выполняется

$x > b$ - x больше b

Свойства числовых множеств

Расшифровка математических символов:

$\forall b \in R$ - для любого действительного числа b

$\exists x \in E$ - существуе такое число x из множества E, что

: - выполняется

$x > b$ - x больше b

$x < b$ - x меньше b

Определение

Множество E называется **ограниченным**, если $\exists b > 0 \ \forall x \in E$: $|x| \leq b$

Определение
Множество E называется **ограниченным**, если $\exists b > 0\ \forall x \in E$: $|x| \leq b$

Примеры:

Определение

Множество E называется **ограниченным**, если $\exists b > 0 \ \forall x \in E$: $|x| \leq b$

Примеры:

1. $(-\infty, 3]$ - числовое множество, ограниченое сверху, но неограниченое снизу.

Свойства числовых множеств

Определение
Множество E называется **ограниченным**, если $\exists b > 0\ \forall x \in E$: $|x| \leq b$

Примеры:
1. $(-\infty, 3]$ - числовое множество, ограниченое сверху, но неограниченое снизу.
2. $[-3, 2]$ - ограниченное множество.

Определение

Наименьшее из всех чисел, ограничивающих множество E сверху, называется его **точной верхней гранью** и обозначается $supE$

Свойства числовых множеств

Определение

Наибольшее среди всех чисел, ограничивающих множество E снизу, называется его **точной нижней гранью** и обозначается $infE$.

Свойства числовых множеств

Примеры:

$sup[-3, 2] = 2$

$inf[-3, 2] = -3$

$sup(-3, 2) = 2$

$inf(-3, 2) = -3$