Математический анализ
Модуль 1. Элементарные функции и пределы числовых последовательностей
Лекция 1.3

Аннотация

Необходимое и достаточное условия сходимости. Бесконечно большая последовательность. Бесконечно малая последовательность. Теоремы о конечных и бесконечных пределах. Число e и гиперболические функции.

1 Необходимое и достаточное условия сходимости

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если $\exists b > 0\ \forall n \in N$: $|x_n| \leq b$.

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной сверху (снизу)**, если $\exists b \in R\ \forall n \in N$: $x_n \leq b$ $(x_n \geq b)$.

*Теорема (необходимое условие сходимости)**

Если числовая последовательность имеет конечный предел, то она ограничена.

Доказательство

Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда по определению предела $\exists n_1\ \forall n > n_1$: $|x_n - a| < 1$. Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, ..., |x_{n_1} - a|\}$. Тогда $\forall n \in N$: $|x_n - a| \leq d$.

$\Rightarrow -d \le x_n - a \le d$
$\Rightarrow a - d \le x_n \le a + d$
$\Rightarrow$ последовательность $\{x_n\}$ ограничена. ∎

Определение
Последовательность $\{x_n\}$ называется **возрастающей (убывающей)**, если $\forall n \in N$: $x_n \le x_{n+1}$ ($x_n \ge x_{n+1}$).

Определение
Возрастающие и убывающие последовательности называются **монотонными**.

Теорема (достаточное условие сходимости, теорема Вейерштрасса)
Всякая возрастающая (убывающая) и ограниченная сверху (снизу) последовательность имеет конечный предел.

2 Бесконечно большая последовательность

Определение
Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $|x_n| > \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ и говорят, что последовательность $\{x_n\}$ имеет **бесконечный предел**.

Частные случаи
1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n > \varepsilon$
2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n < -\varepsilon$

3 Бесконечно малая последовательность

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно малой**, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon)$: $|x_n| < \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Свойства бесконечно малых последовательностей

1) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно малые, то $\{x_n + y_n\}$ - бесконечно малая

2) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно малые, то $\{x_n \cdot y_n\}$ - бесконечно малая

3) если $\{x_n\}$ - бесконечно малая, $\{y_n\}$ - ограниченная то $\{x_n \cdot y_n\}$ - бесконечно малая

4 Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями

*Теорема №1**

Если $\{x_n\}$ - бесконечно большая, то $\{1/x_n\}$ - бесконечно малая.

Доказательство

$\{x_n\}$ - бесконечно большая $\Rightarrow$

$\forall M > 0 \ \exists n(M) \in N \ \forall n > n(M)$: $|x_n| > M$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x_n|} = \left|\frac{1}{x_n}\right| < \frac{1}{M}$$

Обозначим: $\varepsilon = \dfrac{1}{M}$.

Тогда имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon)\colon \left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$$

$\Rightarrow \{1/x_n\}$ - бесконечно малая. ■

Теорема №2

Если $\{x_n\}$ - бесконечно малая и $\forall n$: $x_n \neq 0$, то $\{1/x_n\}$ - бесконечно большая.

Символически эти теоремы можно записать в виде:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \qquad \frac{1}{0} = \infty.$$

Пример:

$\{n\}$ - бесконечно большая, $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$

$\{1/n\}$ - бесконечно малая, $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$

5 Теоремы о конечных и бесконечных пределах

В этих теоремах под пределами понимаются как конечный, так и определенного знака бесконечный пределы, т.е. либо число, либо $+\infty$, либо $-\infty$. Случай, когда предел равен ∞, не рассматривается.

Теорема (единственность предела)

Последовательность точек расширенной числовой прямой $\overline{R}$ может иметь на этой прямой только один предел.

Теорема (предельный переход в неравенствах)

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, где $a \in \overline{R}$, и $\forall n : x_n \leq y_n \leq z_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$

6 Число e

Число e определяется как предел последовательности чисел

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

т.е.

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Приближенные оценки дают, что $e \approx 2.718281828459045$. В приближенных вычислениях обычно полагают $e \approx 2.72$.

Число e является основанием экспоненциальной функции $y = e^x$ и натурального логарифма $y = \ln x = \log_e x$. Также через e определяются гиперболические функции:

1) гиперболический синус

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

2) гиперболический косинус

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

3) гиперболический тангенс

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

4) гиперболический котангенс

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

Экономическое приложение:

В экономических моделях число e используется для вычисления доходности банковских вкладов при непрерывном начислении и капитализации процентов. Допустим, мы открыли в банке вклад размером S рублей с годовой процентной ставкой r. По условиям вклада начисление процентов и их капитализация происходит n раз в год. Тогда через m лет размер вклада составит

$$K = S \cdot \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{m \cdot n}.$$

Соответственно, при непрерывном начислении процентов и их капитализации мы будем иметь

$$K = \lim_{n \to \infty} S \cdot \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{m \cdot n} = S \cdot e^{rm/100}.$$