Математический анализ
Модуль 1. Элементарные функции и пределы числовых последовательностей
Лекция 1.2

Аннотация

Принцип вложенных отрезков. Числовая функция. Основные элементарные функции. Элементарная функция. Числовая последовательность и ее предел. Арифметические свойства конечных пределов.

1 Принцип вложенных отрезков

Рассмотрим бесконечную последовательность отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_n, b_n]$, ...

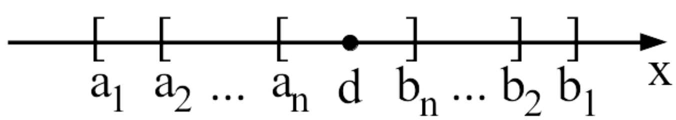


Рис. 1

Определение

Система отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_n, b_n]$, ... называется **системой вложенных отрезков**, если

$a_1 \le a_2 \le ... \le a_n \le ... \le b_n \le ... \le b_2 \le b_1$.

Определение

Говорят, что **длина вложенных отрезков стремится к нулю**, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon)$: $|b_n - a_n| < \varepsilon$.

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists n(\varepsilon) \in N$ - существует натуральное число n, зависящее от ε, такое что

$\forall n > n(\varepsilon)$ - для любого натурального числа n, превосходящего $n(\varepsilon)$

: - выполняется

$|b_n - a_n| < \varepsilon$ - модуль разности b_n и a_n меньше ε.

Теорема (принцип вложенных отрезков)

Для всякой системы вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, ...$ с длинами, стремящимися к нулю, существует единственная точка d, которая принадлежит всем отрезкам системы, причем $d = sup\{a_n\} = inf\{b_n\}$.

2 Числовая функция

Определение

Числовая функция - это правило, ставящее в соответствие каждому элементу некоторого числового множества X некоторое число из множества действительных чисел

Обозначение: $y = f(x)$

x - независимая переменная

y - зависимая переменная

$X = D(f)$ - область определения

Определение

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек $(x, f(x))$, где $x \in X$.

Определение

Пусть дана функция $y = f(x)$. Функция, ставящая в соответствие каждому числу y соответствующее значение x, называется **функци-**

ей, обратной данной, или **обратной функцией**.

Обозначение: $x = f^{-1}(y)$

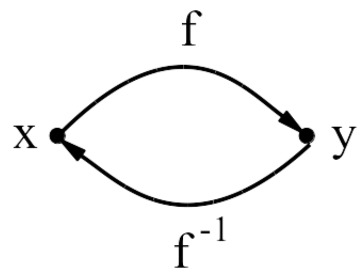


Рис. 2

Определение

Пусть даны функции $y = f(x)$ и $z = g(y)$. Функция $z = g(f(x))$ называется **сложной функцией** или **композицией функций** или **суперпозицией функций** f и g.

Обозначение: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

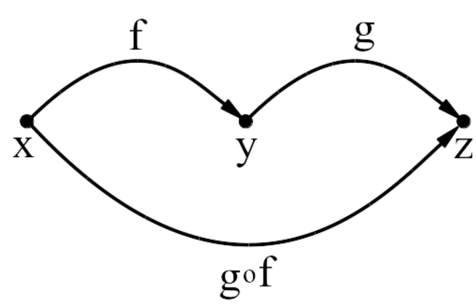


Рис. 3

3 Элементарные функции

К основным элементарным функциям относятся:

1) $y = x^{\alpha}$ - степенная функция

2) $y = a^x, a > 0, a \neq 1$ - показательная функция

3) $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$ - логарифмическая функция

4) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ - тригонометрические функции

5) $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ - обратные тригонометрические функции

Определение

Функция называется **элементарной**, если она задана с помощью формулы, содержащей конечное число арифметических операций и суперпозиций основных элементарных функций.

Примеры: $y = 2x^2 + 3x + 5$, $y = sin(2^x)$, $y = \operatorname{tg}\sqrt{x^3 + x^2}$.

Пример функции, которая не является элементарной:

$$y = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ \sin x, & x > 0. \end{cases}$$

Классификация элементарных функций

1) многочлен (полином)

$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

2) рациональная функция (дробно-рациональная функция)

$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ - полиномы

3) иррациональная функция - это функция, содержащая иррациональности, т.е. корни различных степеней

$y = x + \sqrt[3]{x}$.

4) трансцендентная функция - это различные тригонометрические, обратные тригонометрические, показательные и логарифмические функции.

$y = x + \sin x + \sqrt{x}$

4 Числовая последовательность

Определение

Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие действительное число a_n. Совокупность чисел $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ называется **числовой последовательностью**.

Обозначение: $\{a_n\}$ - числовая последовательность с общим членом a_n.

Определение

Число a_n называется **n-ым членом последовательности** и задается формулой $a_n = f(n)$.

Примеры: $a_n = 1/2^n$, $a_n = (-1)^n \cdot n^3$.

Экономический пример: Допустим, мы открываем в банке вклад на 10 тыс. руб. под 10% годовых с капитализацией процентов и периодом капитализации 1 год. Тогда величина вклада по годам будет представлять собой числовую последовательность $a_1 = 10$, $a_2 = 10 \cdot 1,1$, $a_3 = 10 \cdot 1,1^2$,...,$a_n = 10 \cdot 1,1^{n-1}$, ..., где a_n - размер вклада в течение n-ого года.

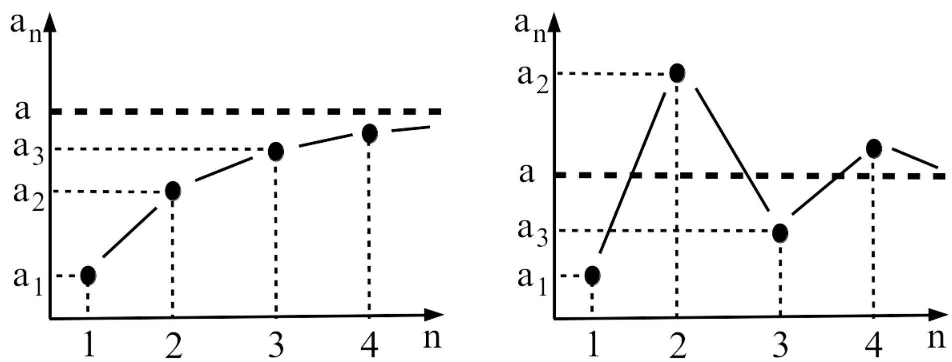
Определение

Число a называется **пределом последовательности $\{\mathbf{a_n}\}$**, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $|a_n - a| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Здесь a - конечное число, т.е. $a \neq \pm\infty$. Поэтому определенный таким образом предел часто называют **конечным пределом**.

Геометрическая интерпретация предела:



(a) (b)

Рис. 4

Определение

Если последовательность имеет конечный предел, то она называется **сходящейся**. В противном случае она называется **расходящейся**.

*Арифметические свойства конечных пределов**

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n / y_n) = a/b$, если $b \neq 0$.

Доказательство свойства 1

Дано: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ (1)

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ (2)

Доказать: $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$ (3)

Последовательность $\{x_n + y_n\}$ имеет предел $a + b$, если согласно определению предела числовой последовательности

$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $|x_n + y_n - a - b| < \varepsilon$, (4)

т.е. нам надо найти $n(\varepsilon)$, при котором выполняется неравенство (4).

(1) $\Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_1(\varepsilon) \in N\ \forall n > n_1(\varepsilon)$: $|x_n - a| < \varepsilon/2$.

(2) $\Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_2(\varepsilon) \in N\ \forall n > n_2(\varepsilon)$: $|y_n - b| < \varepsilon/2$.

Пусть $n(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$. (5)

Тогда $\forall n > n(\varepsilon)$ будут одновременно выполняться неравенства $|x_n - a| < \varepsilon/2$ и $|y_n - b| < \varepsilon/2$. Следовательно,

$|x_n + y_n - a - b| = |x_n - a + y_n - b| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Это означает, что при задании $n(\varepsilon)$ по формуле (5) неравенство (4) будет выполняться, а значит, справедлива формула (3). ■